

## SESSION DE JANVIER 2009

### Optimisation – 1h30 – 1<sup>ère</sup> année Magistère

Ce sujet comporte 2 pages. Vous répondrez à toutes les questions. Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

#### QUESTION A.

Qu'est-ce que le principe Le Chatelier Samuelson ? Illustration graphique.

#### QUESTION B. ALLOCATION DES RESSOURCES PRODUCTIVES

Le problème est d'allouer une ressource productive  $x$  dans les deux secteurs productifs de l'économie. Le critère à maximiser est le revenu tiré de ces activités productives sous la contrainte de disponibilité de cette ressource. Les données du problème sont décrites dans le tableau suivant :

	Branche $i = 1$	Branche $i = 2$
$p_i$ : prix du bien produit dans la branche $i$	$p_1$	$p_2$
$f^i(x_i)$ : technologie de production de la branche $i$ qui utilise la ressource en quantité $x_i$	$f^1(x_1) = Ax_1^\alpha$ ; $0 < \alpha < 1$ ; $A > 0$	$f^2(x_2) = x_2^\beta$ ; $0 < \beta < 1$
$\bar{X}$ : quantité disponible de la ressource, à répartir entre les 2 branches		

- 1) Poser la fonction de Lagrange dans le cas où un planificateur social maximise le revenu total  $R$  tiré des deux activités productives sous la contrainte de disponibilité de la ressource ;
- 2) Etablir la condition de premier ordre et vérifier la condition de second ordre. Les solutions sont notées avec \* ;

En utilisant le théorème de l'enveloppe (il n'est pas besoin de calculer la solution) :

- 3) Interpréter le multiplicateur de Lagrange et proposer une application numérique ;
- 4) Etablir l'effet de  $p_1$  sur le revenu  $R$  à l'optimum.

### QUESTION C. LE THEOREME DE KUHN ET TUCKER

Résoudre :  $\max_{x_1, x_2} 2x_2 - x_1^2$  sous la contrainte  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$  et les contraintes de non négativité des variables de choix.

### QUESTION D. CONTROLE OPTIMAL

L'objectif des agents économiques est de maximiser leur utilité inter-temporelle  $U$  définie de la façon suivante en choisissant  $c(t)$ , leur consommation, en tout point de leur horizon temporel selon le problème de contrôle optimal suivant :

$$\max_{c(t)} U = \int_0^T \ln(c(t)) e^{-\rho t} dt ; \rho \text{ est le taux de préférence pour le présent}$$

Sous la contrainte dynamique qui donne l'évolution de leur richesse  $w$  :

$$\dot{w}(t) = f(c(t), w(t)) = 2w(t)^{0.5} - c(t) ;$$

La condition initiale donne la valeur initiale de la richesse :

$$w(0) = w_0$$

Il est demandé de :

- 1) Poser le problème sous la forme d'un problème de contrôle optimal autonome en notant  $\lambda$  le multiplicateur dynamique associé, défini en valeur courante. Identifier les variables d'état et de contrôle. Pourquoi la variable d'état est considérée comme passive ?
- 2) Etablir les conditions de premier ordre en établissant notamment les équations canoniques de Hamilton ;
- 3) Identifier et interpréter les conditions de l'optimum instantané et dynamique ;
- 4) Quelle condition doit être spécifiée pour caractériser l'évolution des variables de contrôle et d'état ? En donner un exemple.

Barème indicatif : A : 4 points ; B : 6 points ; C : 4 points ; D : 6 points