Licence « Economie Gestion » 3ème année – Parcours Magistère Développement économique

Chapitre IV. Contrôle optimal

Pascale Combes Motel

Table des matières

Table des illustrations

Bibliographie

Bellman, R., 1957 *Dynamic Programming*, Princeton University Press.

Brander, J. A. & M. Scott Taylor, 1998 "The Simple Economics of Easter Island: A Ricardo-Malthus Model of Renewable Resource Use" *The American Economic Review*, vol. 88, n° 1, March, pp. 119-138.

Cass, D. 1965 "Optimum Growth in a Aggregative Model of Capital Accumulation" *Review of Economic Studies*, vol. 55, n° 4, September, pp. 793-814.

Conrad, JM. 1999 *Resource Economics*, Cambridge University Press.

Cuthbertson, K. 2000 *Economie financière quantitative. Actions, obligations et taux de change*, De Boeck. Ouvertures Economiques.

Hamilton, K. 2002 "Accounting for sustainability" mimeo. Disponible en ligne: http://info.worldbank.org/etools/docs/library/36500/AccountingForSustainbility.pdf . Consulté le 20 octobre 2008.

Hamilton, K. & G. Atkinson, 2006 *Wealth, Welfare and Sustainability. Advances in Measuring Sustainable Development*, Edward Elgar.

Hamilton, K. & M. Clemens, 1999 "Genuine Savings Rates in Developing Countries" *The World Bank Economic Review*, vol. 13, n° 2, pp. 333-356.

Heal, G.M. 1993 « The Optimal Use of Exhaustible Resources » in *Handbook of Natural Resource and Energy Economics*, A.V. Kneese & J.L. Sweeney (ed.), Elsevier Science Publishers.

Kaldor, N. 1987 « Spéculation et stabilité économique » in *Economie et instabilité*, Economica.

Koopmans, TJ. 1965 "On the Concept of Optimal Economic Growth" in *The Economic Approach to Development Planning*, North Holland.

Krautkraemer, J. 1998 "Non Renewable Resource Scarcity" *Journal of Economic Literature*, vol. 36, December, pp. 2065-2107. Disponible sur JSTOR.

Lacaze, D. 1990 *Optimisation appliquée à la gestion et à l'économie. Cours et exercices corrigés*, Economica.

Léonard, D. & N.V. Long 1992 *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press.

Léonard, D. 2000 « Commande optimale » in *Dictionnaire de sciences économiques*, PUF.

Lucas, RE. 1988 "On the Mechanics of Economic Development" *Journal of Monetary Economics*, vol. 22, n° 1, July, pp. 3-42.

Pingle, M. 2003 "Introducing Dynamic Analysis Using Malthus's Principle of Population" *Journal of Economic Education*, winter, pp. 3-20.

Mots clés

Chapitre IV. Contrôle optimal

En dynamique économique, on rencontre fréquemment les équations différentielles linéaires et des systèmes d'équations non linéaires d'ordre 1. Elles décrivent la variation de certaines variables au cours du temps. On les rencontre naturellement dans l'analyse de la croissance et des fluctuations économiques, dans le domaine des ressources naturelles. Elles décrivent les évolutions des prix.

La dynamique des variables en économie peut découler :

De contraintes dynamiques : contraintes d'accumulation qui décrivent la façon dont évolue une variable de stock au cours du temps ;

De la résolution d'un problème d'optimisation dynamique.

Une équation différentielle considère le temps *t* comme une variable continue, à la différence d'une équation de récurrence où le temps est une variable discrète. Considérer le temps comme une variable continue ou discrète est un choix qui est dicté par la nature du problème à traiter. On considère le temps comme une variable discrète lorsque la durée est importante et variable dans la réalisation des variables. On considère le temps comme une variable continue lorsque les variables se réalisent ou sont mesurées à la fin d'intervalles de temps fixés (paiement d'un intérêt, mesure du PIB etc.).

En dynamique on rencontre souvent des équations différentielles. On rappelle d'abord la méthode de résolution des équations différentielles linéaires :[1] Section 1. . Puis, on présente les problèmes d'optimisation dynamique sous la forme de problèmes de contrôle optimal : Section 2. Qu'est-ce qu'un problème de contrôle optimal ? La méthode de résolution : Section 3. Conditions d'optimalité et la représentation des solutions (V.)

[1] Cette méthode peut être appliquée à la résolution d'équations différentielles non linéaires : les équations de Bernoulli.

Section 1. Les équations différentielles linéaires d'ordre 1

Une équation différentielle du premier ordre la forme générale suivante : $\dot{x}(t) = g(t, x(t))$. Elle comporte une condition initiale préalablement spécifiée $x(t_0) = x_0$. Une équation linéaire autonome en est un cas particulier :

$\dot{x}(t) + a_1(t)x(t) = \varphi(t)$
$a_1(t)$ et $\varphi(t)$ sont des paramètres susceptibles d'évoluer dans le temps (1)

Exemples à caractère économique :

La contrainte budgétaire instantanée des ménages est une équation différentielle linéaire du premier ordre où x représente la richesse matérielle des ménages, $-a_1(t)$ est le taux d'intérêt et $\varphi(t)$ représente le revenu du travail net des dépenses de consommation.[2]

Quand $\varphi(t) = 0$, $a_1(t)$ est un taux de variation en t de x.

I. METHODE DE RESOLUTION

La solution générale d'une équation différentielle comme l'équation (1) est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. On utilise la méthode de la variation de la constante

A. *Solution générale de l'équation homogène*

Soit $x_1(t)$ la solution de l'équation homogène c'est-à-dire vérifiant $\dot{x}_1(t) + a_1(t)x_1(t) = 0$. La solution générale est la suivante :

$$x_1(t) = Cste\, e^{-A(t)\cdot(t-t_0)}$$

Avec :

Cste une constante ;

$A(t)(t\text{-}t_0)$ est une primitive de a_1 sur t qui s'annule en t_0, qui s'écrit :

$A(t)(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau$ si a_1 est constant dans le temps $A(t)(t - t_0) = a_1(t - t_0)$

[2] L'équation d'accumulation du capital dans un modèle de croissance est une équation différentielle non linéaire du premier ordre.

où τ est un indice du temps (notation différente du temps car t est une borne de l'intégrale). On préfère cette écriture de la solution particulière qui fait apparaître explicitement $(t - t_0)$ l'intervalle qui sépare de la période courante de la période initiale.

B. Solution particulière de l'équation générale

Partant de la solution générale de l'équation homogène, on cherche une solution particulière de l'équation générale, notée $x_2(t)$ de la forme :

$\forall\, t \in I,\ x_2(t) = Cste(t)e^{-A(t)(t-t_0)}$ où $Cste$ définie sur I est dérivable.

Il s'agit de la méthode de la variation de la constante

1) On part de l'expression de x_2 que l'on dérive par rapport au temps :

$\dot{x}_2(t) = Cst\dot{e}(t)e^{-A(t)(t-t_0)} - a_1(t)Cste(t)e^{-A(t)(t-t_0)}$ d'où

$\dot{x}_2(t) + a_1(t)x_2(t) = Cst\dot{e}(t)e^{-A(t)(t-t_0)}$

2) Donc $x_2(t)$ est une solution de l'équation générale $\dot{x}(t) + a_1(t)x(t) = \varphi(t)$ ssi :

$\forall\, t \in I,\ \varphi(t) = Cst\dot{e}(t)e^{-A(t)(t-t_0)}$ soit $Cste(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)e^{A(\tau)\cdot(\tau-t_0)}d\tau$ sur I

Remarque τ est un indice du temps. On n'emploie pas l'indice t qui est une borne de l'intervalle d'intégration. La solution particulière vérifie :

$$x_2(t)e^{A(t)\cdot(t-t_0)} = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)e^{A(\tau)\cdot(\tau-t_0)}d\tau$$

C. Solution générale

La solution générale est la somme de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ soit :

$\forall\, t \in I\ \ x(t) = Cste\ e^{-A(t)\cdot(t-t_0)} + e^{-A(t)(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)e^{A(\tau)(\tau-t_0)}d\tau$ ou bien

$$x(t)e^{A(t)(t-t_0)} = Cste + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)e^{A(\tau)(\tau-t_0)}d\tau$$

Compte tenu de la condition initiale $x(t_0) = x_0$ il vient $Cste = x_0$ et

$$\forall\ t \in I,\ x(t)e^{A(t)(t-t_0)} = x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)e^{A(\tau)(\tau-t_0)}d\tau$$

II. EXEMPLES ECONOMIQUES

2 exemples sont présentés :[3]

La contrainte budgétaire inter-temporelle des ménages (paragraphe A) ;
La condition d'arbitrage pour le prix d'un actif (paragraphe B page 7)

A. *La contrainte budgétaire inter-temporelle des ménages*

Considérons la contrainte budgétaire instantanée d'un individu qui relie les dépenses et les revenus (du travail et de la propriété) aux dépenses de consommation instantanés des individus :

$\dot{w}(t) = (r(t) - n)w(t) + s(t) - c(t)$ avec $w(t_0) = w_0$ la condition initiale (2)

w est la richesse matérielle du ménage ;

$r(t)$-n est le taux net de rémunération de la richesse *i.e.* le taux d'intérêt $r(t)$ diminué l'accroissement démographique n ;

$s(t)$ est le taux de salaire ;

$c(t)$ est la dépense de consommation individuelle dont le prix sert de numéraire.

En utilisant les notations de l'équation (1), on a donc :

$w(t) = x(t)$; $a_1(t) = r(t) - n$; $\varphi(t) = s(t) - c(t)$

Cette contrainte généralise l'expression des contraintes budgétaires instantanées du consommateur en 2 périodes (*cf.* chapitre II) :

Période 0 : $e(0) \equiv w(1) - w(0) = (r(0) - n)w(0) + s(0) - c(0)$. S'il n'y a pas de patrimoine initial : $e(0) \equiv w(1) = s(0) - c(0)$;
Période 1 : $e(1) \equiv w(2) - w(1) = (r(1) - n)w(1) + s(1) - c(1)$. S'il n'y a ni dette ni patrimoine en fin de période 1 : $c(1) = (1 + r(1) - n)e(0) + s(1)$. Dans un MGI, il n'y a pas de revenu du travail en période 1 : $c(1) = (1 + r(1) - n)e(0)$

Il est intéressant de chercher une solution à cette équation puisqu'elle permet d'arriver à une expression de la contrainte budgétaire inter-temporelle des ménages.

1. Solution générale de l'équation homogène

Il s'agit de : $\dot{w}(t) = (r(t) - n)w(t) \equiv -a_1(t)w(t)$

La solution est :

$$w_1(t) = Cste.e^{-A(t)\cdot(t-t_0)}$$

a) Le taux d'intérêt moyen

$$-A(t)(t-t_0) = \int_{t_0}^{t} -a_1(\tau)d\tau \text{ soit } -A(t)(t-t_0) = \int_{t_0}^{t} (r(\tau) - n)d\tau$$

On définit le taux d'intérêt moyen sur la période [t_0 ; t] : $\bar{r}(t) = \dfrac{1}{(t-t_0)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau$

Cela permet de réécrire la solution générale de l'équation homogène :

$$w_1(t) = Cste\, e^{(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)}$$

La solution de l'équation homogène peut être interprétée comme le niveau de la richesse qui serait atteint s'il n'y avait pas de dépense de consommation ni salaire. Elle donne le niveau de la richesse en t, qui s'accroît ou diminue entre t_0 et t :

En t $w_1(t) < w_0$ si l'accroissement démographique est plus important que le taux d'intérêt moyen ;

En t $w_1(t) > w_0$ si l'accroissement démographique est plus faible que le taux d'intérêt moyen.

b) Le taux de croissance maximal de l'endettement

On peut noter que le signe de w n'est pas imposé *a priori* il s'agit de la somme algébrique des actifs et des passifs :

En t $w(t) < 0$ signifie que le ménage est endetté : la valeur faciale de la dette est plus élevée que celle des placements financiers ;

En t $w(t) > 0$ signifie que le ménage est un prêteur net.

[3] On peut aussi illustrer le principe de population de Malthus par des équations différentielles : *cf.* Pingle, M. 2003

D'après l'équation homogène $\dot{w}(t) = (r(t) - n)w(t)$ si le ménage n'a aucun revenu du travail et s'endette pour financer sa consommation, sa dette augmente au taux $r(t)-n$: il s'agit du taux maximal auquel peut augmenter la dette.

2. Solution particulière de l'équation générale

Elle est établie par la méthode de la variation de la constante. Soit $w_2(t)$ vérifiant :

$w_2(t) = Cste(t)e^{(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)}$ que l'on dérive par rapport au temps :
$\dot{w}_2(t) = C\dot{s}te(t)e^{(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)} + (r(t)-n)Cste(t)e^{(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)}$ soit
$\dot{w}_2(t) = C\dot{s}te(t)e^{(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)} + (r(t)-n)w_2(t)$ qui vérifie également l'expression générale (2) :
$\dot{w}_2(t) = C\dot{s}te(t)e^{(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)} + (r(t)-n)w_2(t) = s(t) - c(t) + (r(t)-n)w(t)$ d'où
$C\dot{s}te(t)e^{(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)} = s(t) - c(t)$

Cette expression est l'épargne instantanée constituée en t. C'est dire que la constante d'intégration dépend de la somme actualisée de l'épargne entre t_0 et t. Il vient :

$C\dot{s}te(t) = (s(t) - c(t))e^{-(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)}$ dont on prend la primitive

$$Cste(t) = \int_{t_0}^{t} (s(\tau) - c(\tau))e^{-(\bar{r}(\tau)-n)(\tau-t_0)}d\tau$$

La solution particulière $w_2(t)$ est :

$$w_2(t) = e^{(\bar{r}(\tau)-n)(\tau-t_0)}\int_{t_0}^{t} (s(\tau) - c(\tau))e^{-(\bar{r}(\tau)-n)(\tau-t_0)}d\tau$$

3. Solution générale : la relation entre la somme actualisée des dépenses de consommation et des salaires

La solution générale est la somme de $w_1(t)$ et de $w_2(t)$: $w(t) = w_1(t) + w_2(t)$ soit :

$$w(t) = Cste \cdot e^{(\bar{r}(\tau)-n)(\tau-t_0)} + e^{(\bar{r}(\tau)-n)(\tau-t_0)}\int_{t_0}^{t} (s(\tau) - c(\tau))e^{-(\bar{r}(\tau)-n)(\tau-t_0)}d\tau$$

Compte tenu de la condition initiale $w(t_0) = w_0$ il vient $Cste = w_0$. La solution générale vérifie :

$$\forall t,\ w(t)e^{-(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)} = w_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\bar{r}(\tau)-n)(\tau-t_0)}(s(\tau)-c(\tau))d\tau \ ;$$

En réarrangeant les termes et en balayant l'intégralité de l'horizon temporel :

$$\int_{t_0}^{T} e^{-(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)}c(t)dt = -w(T)e^{-(\bar{r}(T)-n)(T-t_0)} + w_0 + \int_{t_0}^{T} e^{-(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)}s(t)dt$$

On a donc une relation (comptable) entre la somme actualisée des dépenses de consommation (terme de gauche) et la valeur présente de la richesse terminale, la richesse initiale et la somme actualisée des revenus du travail. Cette relation (comptable) stipule que les dépenses de consommation sont d'autant plus élevées que la richesse terminale actualisée est faible, que la richesse initiale et les revenus du travail sont élevés. On définit les termes suivants :

$\int_{t_0}^{T} e^{-(\bar{r}(t)-n)\cdot(t-t_0)}s(t)dt$, la somme actualisée des revenus du travail est également appelée richesse humaine ;

La richesse matérielle est mesurée par w_0.

On dira que le ménage est solvable si la valeur présente de sa richesse terminale est non négative : $w(T)e^{-(\bar{r}(T)-n)(T-t_0)} \geq 0$. Dans ce cas, la contrainte budgétaire devient :

$$\int_{t_0}^{T} e^{-(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)}c(t)dt \leq w_0 + \int_{t_0}^{T} e^{-(\bar{r}(t)-n)(t-t_0)}s(t)dt$$

Autrement dit, si le ménage est solvable la somme actualisée de ses dépenses ne doit pas excéder sa richesse.

B. Prix d'un actif et absence de bulle spéculative sur les marchés de capitaux

Une autre illustration de l'utilisation des équations différentielles peut être empruntée à la finance. Il s'agit ici de déterminer la valeur fondamentale d'un actif à partir d'une équation différentielle qui égalise le bénéfice marginal au coût d'opportunité de la détention de cet actif.[4]

1. La condition d'absence d'arbitrage dans la détention d'actifs

Les détenteurs d'actifs ont en tout point du temps le choix entre deux opportunités : garder leur capital une période supplémentaire ou bien la vendre. Ils respectent une condition d'absence d'arbitrage inter-temporel qui se traduit par la relation suivante qui peut être établie par optimisation dynamique. Cette équation est aussi appelée équation d'Euler d'évaluation des actifs :

$$\dot{p}_K(t) + p(t) f'(k(t)) = (r(t) + e) p_K(t) \tag{3}$$

ou encore :

$$\frac{\dot{p}_K(t)}{p_K(t)} + \frac{p(t)}{p_K(t)} f'(k(t)) - e = r(t) \tag{3a}$$

Le prix $p_K(t)$ est le prix d'un actif en l'occurrence une unité de capital productif ;

Le prix $p(t)$ est celui d'un bien produit à partir de capital productif, il peut évoluer au cours du temps ;

f' est la productivité marginale du capital investi ;

Le taux $r(t)$ est sans risque comme par exemple le rendement des obligations publiques, mais il évolue au cours du temps ;[5]

e est le taux de dépréciation constant du capital productif, supposé constant.

Si le prix des biens est supposé constant fixé à 1, l'équation (3) permet de retrouver l'égalité entre la productivité marginale et le taux d'intérêt net : $f'(k(t)) = r(t) + e$ et signifie que la productivité marginale du capital productif est égale au coût d'opportunité du capital, calculé comme la somme du taux de rendement des capitaux investis (ce que coûte 1 euro emprunté) et le taux de dépréciation du capital. Cette égalité peut être également obtenue de la condition de maximisation du profit instantané.

L'équation (3) peut être interprétée de différentes façons :

[4] Pour plus de développements concernant l'évaluation des actifs *cf.* par exemple Cuthbertson, K. 2000 chapitre 4.

[5] Ici on fait l'hypothèse simplificatrice d'anticipations parfaites, mais on peut relâcher cette hypothèse et la substituer par celle des anticipations rationnelles.

Les détenteurs de capitaux ne peuvent réaliser de sur-profit grâce à la détention de capital *i.e.* le bénéfice marginal de la détention de capital est nul, la recette marginale (terme de gauche) étant la plus-value attendue en capital à laquelle on ajoute la productivité marginale en valeur,[6] le coût marginal étant le taux d'intérêt sans risque (ce que rapporte 1 franc placé) net de la dépréciation du capital ;

Dans sa version (3a) elle signifie que pour un taux d'intérêt sans risque et une productivité marginale du capital, donnés, le prix d'une unité de capital en t dépend de son cours anticipé en t+1. Les attentes sur le prix futur déterminent le prix courant.

La condition d'arbitrage ne permet pas de déterminer la valeur en t d'une unité de capital. En effet, elle signifie que le prix en t d'une unité de capital dépend de son prix anticipé en t+1, en conséquence il existe une infinité de sentiers d'évolution du prix d'une unité de capital. Pour déterminer la valeur d'une unité de capital, on fait l'hypothèse d'absence de bulle spéculative *i.e.* on fait l'hypothèse que le prix d'une unité de capital reflète sa « valeur fondamentale »

On résout maintenant l'équation différentielle (3) :

$\dot{p}_K(t) = (r(t)+e)p_K(t) - pf'(k(t))$ soit en utilisant les notations de l'équation (1) :
$-a_1(t) = r(t) - n$ et $\varphi(t) = -pf'(k(t))$

2. Solution générale de l'équation homogène

Il s'agit de : $\dot{p}_K(t) = (r(t)+e)p_K(t) \equiv -a_1(t)$

La solution est notée $p_{1,K}$:

$$p_{1,K}(t) = Cste\, e^{-A(t)\cdot(t-t_0)}$$

$$-A(t)(t-t_0) = \int_{t_0}^{t} -a_1(\tau)d\tau \text{ soit } -A(t)(t-t_0) = \int_{t_0}^{t} (r(\tau)+e)d\tau$$

On définit le taux d'intérêt moyen sur la période $[t_0 \,;\, t]$: $\bar{r}(t) = \frac{1}{(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau$

Cela permet de réécrire la solution générale de l'équation homogène :

$$p_{1,K}(t) = Cste\, e^{(\bar{r}(t)+e)(t-t_0)} \quad (4)$$

[6] S'il s'agissait d'une action, la productivité marginale serait remplacée par le dividende.

Cette équation donne le niveau du prix de l'actif si la productivité marginale ou le dividende était nul. Il augmente à un taux égal au coût d'opportunité de l'actif. Par exemple, on suppose que la productivité marginale du capital est nulle. Dans ce cas, la solution est celle de l'équation homogène. En outre on suppose le taux de rendement sans risque constant est égal à 3% et un taux de dépréciation du capital de 2%. L'équation (4) devient :

$$p_K(t) = p_K(t_0)e^{(r+e)(t-t_0)} \text{ soit } p_K(t) = p_K(t_0)e^{0,05(t-t_0)} \qquad (5)$$

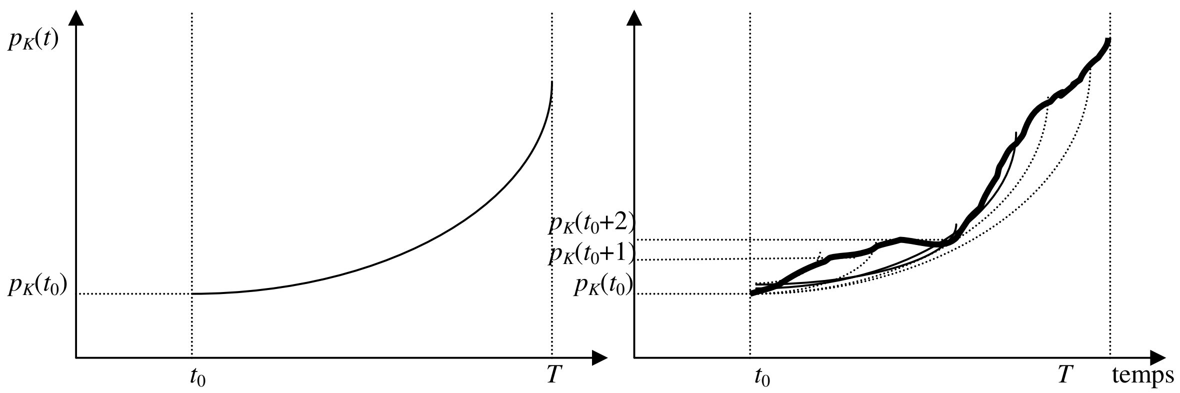
On peut déterminer le prix du bien de capital en t relativement à celui prévalant en t_0 :

$\dfrac{p_K(t)}{p_K(t_0)} = e^{0,05(t-t_0)}$ on peut maintenant déterminer le prix dans quelques exemples :

t-t_0= 1, $p_K(t)/p_K(t_0) = e^{0,05} \cong 1,05$; t-t_0= 2, $p_K(t)/p_K(t_0) = e^{0,05\cdot 2} \cong 1,11$ …

Interprétation. Pour que l'arbitragiste garde une unité de capital une période au-delà de la période initiale t_0 il faut que son prix soit égal à 1,05 fois celui de l'actif en première période. Pour que l'arbitragiste garde une unité de capital encore une période supplémentaire il faut que le prix augmente encore et représente 1,11 fois le prix initial. Autrement dit pour un taux d'intérêt et d'érosion du capital constant, le coût d'opportunité de sa détention est une fonction croissante du temps. Le prix du bien de capital doit augmenter de façon à égaliser ce coût d'opportunité, de manière exponentielle :

Figure 1. Evolution du prix d'un actif non productif dans l'hypothèse d'un taux d'intérêt constant et variable



Si le taux d'intérêt est variable au cours du temps, l'évolution du prix de l'actif est une exponentielle pure du temps et du taux d'intérêt moyen, mais n'a pas nécessairement une évolution monotone.

3. Solution particulière de l'équation générale

Elle est établie par la méthode de la variation de la constante. Soit $p_{2,K}(t)$ vérifiant :

$p_{2,K}(t) = Cste(t)e^{(\bar{r}(t)+e)(t-t_0)}$ que l'on dérive par rapport au temps :
$\dot{p}_{2,K}(t) = C\dot{s}te(t)e^{(\bar{r}(t)+e)(t-t_0)} + (r(t)+e)Cste(t)e^{(\bar{r}(t)+e)(t-t_0)}$ soit
$\dot{p}_{2,K}(t) = C\dot{s}te(t)e^{(\bar{r}(t)+e)(t-t_0)} + (r(t)+e)p_{2,K}(t)$ qui vérifie également l'expression générale (3) :
$\dot{p}_{2,K}(t) = C\dot{s}te(t)e^{(\bar{r}(t)+e)(t-t_0)} + (r(t)+e)p_{2,K}(t) = -pf'(k(t))$ d'où
$C\dot{s}te(t)e^{(\bar{r}(t)+e)(t-t_0)} = -pf'(k(t))$

Il vient :

$C\dot{s}te(t) = -p(t)f'(k(t))e^{-(\bar{r}(t)+e)(t-t_0)}$ dont on prend la primitive

$$Cste(t) = -\int_{t_0}^{t} p(\tau)f'(k(\tau))e^{-(\bar{r}(\tau)+e)(t-t_0)}d\tau$$

La solution particulière $p_{2K}(t)$ est :

$$p_{2,K}(t)e^{-(\bar{r}(\tau)+e)(t-t_0)} = \int_{t_0}^{t} p(\tau)f'(k(\tau))e^{-(\bar{r}(\tau)+e)(t-t_0)}d\tau$$

4. Solution générale : la valeur fondamentale d'un actif

On additionne $p_{1,K}$ et $p_{2,K}$ pour obtenir la solution générale :

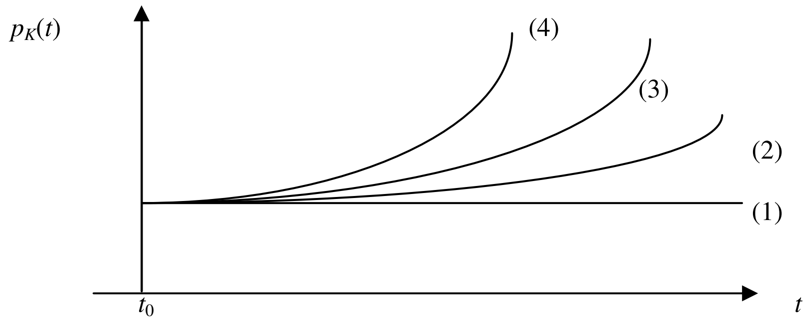
$p_K(t) = e^{(\bar{r}(t)+e)(t-t_0)}\left(Cste - \int_{t_0}^{t} p(\tau)f'(k(\tau))e^{-(\bar{r}(\tau)+e)(t-t_0)}d\tau\right)$; comme $p_K(t_0)$ est connu, il vient :

$p_K(t)e^{-(\bar{r}(\tau)+e)(t-t_0)} = p_K(t_0) - \int_{t_0}^{t} e^{-(\bar{r}(\tau)+e)(t-t_0)}p(\tau)f'_K(\tau)d\tau$ soit

$$p_K(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-(\bar{r}(\tau)+e)(t-t_0)}p(\tau)f'_K(\tau)d\tau + p_K(t)e^{-(\bar{r}(\tau)+e)(t-t_0)} \qquad (6)$$

Cette expression illustre l'interprétation de l'équation (3a) dans le sens où le prix courant $p_K(t_0)$ dépend non seulement de la somme actualisée des productivités marginales futures mais aussi du prix futur (anticipé). Une modification du prix futur $p_K(t)$ modifie le prix courant $p_K(t_0)$. Si le prix futur est révisé à la hausse, le respect de la condition d'arbitrage (3) impose une augmentation du prix courant $p_K(t_0)$. Cela illustre ce qui se passe sur les marchés de valeurs mobilières à savoir que leur cours augmente parce qu'on s'attend à ce qu'ils le fassent.

Figure 2. Chemin possible du prix d'une unité de capital (une action par exemple)



L'évolution (1) représente l'évolution du prix de l'actif en absence de bulle. Les évolutions (2) à (4) sont compatibles avec la condition d'arbitrage (3) mais constituent des bulles spéculatives qui finissent tôt ou tard par éclater. Il existe en fait une infinité d'évolutions possibles du prix de l'actif. Un seul de ces chemins n'est pas explosif qui correspond à ce que l'on anticipe que la valeur présente du prix futur de l'actif, est nulle. Dans la technique du contrôle optimal on appelle cela une condition de transversalité : le prix d'un bien de capital ne peut augmenter indéfiniment :[7]

$$\lim_{t\to\infty} p_K(t)e^{-(\bar{r}(\tau)+e)(t-t_0)} = 0$$

La condition de transversalité stipule que le prix d'une unité de capital ne peut augmenter plus vite que le coût d'opportunité du capital mesuré par le taux d'intérêt augmenté du taux de dépréciation du capital. Dans ce cas, on dit que le prix courant de l'actif reflète « la valeur fondamentale » d'une unité de capital. Cela permet de déterminer le prix d'une unité de capital en t_0 comme la somme actualisée des productivités marginales futures du capital :

$$p_K(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-(\bar{r}(\tau)+e)(t-t_0)} p(\tau) f_K'(\tau) d\tau \tag{7}$$

On appelle « bulle spéculative » toute hausse inexorable du cours des actifs. On parle de bulle parce qu'elle enfle jusqu'à ce qu'elle explose et l'adjectif spéculative puisque la seule motivation de la hausse est la hausse future, ce qui renvoie bien à la définition de la

[7] *Cf.* pour de plus amples développements sur l'absence de solution unique pour le cours de l'actif : Cuthbertson, K. 2000 chapitre 7.

spéculation établie par Kaldor (Encadré 1 ci-dessous). En cas de bulle spéculative, le cours de l'actif est supérieur à sa valeur fondamentale. L'histoire financière regorge d'épisodes où la spéculation entraîne une hausse apparemment déraisonnable du prix des actifs. L'une des plus célèbres est celle concernant la tulipe en fait une variété très particulière) au 17$^{\text{ème}}$ siècle. En 1637 le prix des tulipes a augmenté de 3000% au cours des 2 premiers mois de l'année et s'est brutalement effondré ensuite. Plus récemment, la nouvelle économie a vraisemblablement entraîné la hausse des prix sur les marchés des valeurs mobilières jusqu'à des valeurs largement supérieures à leurs « fondamentaux ». *Cf.* par exemple l'évolution de l'action FT.

Encadré 1. La spéculation

« La spéculation peut se définir comme l'achat (ou la vente) de marchandises en vue d'une revente (ou d'un rachat) à une date ultérieure, là où le mobile d'une telle action est l'anticipation d'un changement des prix en vigueur, et non un avantage résultant de leur emploi, ou une transformation ou un transfert d'un marché à un autre… Ce qui distingue achats et ventes spéculatifs des autres achats et ventes est que leur seul motif est l'anticipation d'un changement imminent du prix en vigueur. »

Source : Kaldor, N. 1987

Section 2. Qu'est-ce qu'un problème de contrôle optimal ?

Développement de l'utilisation du contrôle optimal en économie depuis les années 60. Technique utilisée pour traiter des problèmes d'optimisation dynamique, à côté des techniques de la programmation dynamique et du calcul des variations. Pour comprendre un problème de contrôle optimal on peut poser un modèle générique (paragraphe I.), proposer des exemples (paragraphe II.) puis définir la fonction de Hamilton, la fonction à maximiser dans un tel problème (paragraphe III.)

I. UN MODELE GENERIQUE DE CONTROLE OPTIMAL

D'après Léonard, D. 2000. Un problème de contrôle optimal comporte 3 éléments :

Une fonction d'objectifs de nature inter-temporelle généralement : équation (8) ;

Une contrainte qui prend la forme d'une équation différentielle du 1er ordre et décrit l'évolution d'une variable de stock : équation (9) ;

Une condition spécifiant la valeur initiale de la variable de stock : celle-ci est supposée connue : équation (10)

Définition 1. Un problème générique de contrôle optimal

$$\max_{c(t)} U \equiv \int_{t_0}^{T} u(c(t), s(t), t)\,dt \tag{8}$$

sous une contrainte dynamique :

$$\dot{s}(t) = f(c(t), s(t), t) \tag{9}$$

les conditions initiales étant connues :

$$s(t_0) = s_0 \tag{10}$$

On peut imposer les conditions terminales appelées conditions de transversalité :

$$s(T) = s_T \tag{11}$$

Les équations (8) à (10) constituent la trame d'un problème de contrôle optimal. On peut en identifier les caractéristiques et variables essentielles.

t est l'indice du temps. Il permet de repérer les variables au cours de l'horizon temporel $[t_0 ; T]$. t_0 est le début de l'horizon temporel, encore appelé date initiale ; T est la fin de l'horizon temporel encore appelée date terminale.

$s(t)$ est appelée variable d'état.

Il s'agit d'une variable de stock (capital, richesse, effectif ou volume d'une ressource naturelle, etc.). L'équation (9) décrit son évolution notée $\dot{s}(t)$ représentée par sa dérivée par rapport au temps qui correspond donc à un flux. Dans tout problème de contrôle optimal on connaît la valeur initiale de la variable d'état donnée par (10) : il s'agit donc d'un des paramètres du problème pouvant faire l'objet d'analyse de sensibilité.[8] Par contre, la spécification de la valeur terminale de la variable d'état n'est pas obligatoire (équation 11), elle peut être remplacée par d'autres conditions dites de transversalité. L'équation (9) n'est pas une équation décrivant un comportement : il s'agit d'une contrainte économique (identité comptable entre l'épargne et l'investissement) ou d'une contrainte naturelle décrivant par exemple le renouvellement naturel d'une ressource. Dans le cas général, on ne précise pas la forme de la fonction *f*. Il s'agit cependant généralement d'une équation différentielle linéaire du 1[er] ordre qui dépend de la variable d'état elle-même et de la variable dite de contrôle $c(t)$ et du temps. Dans beaucoup de problèmes, *f* est autonome c'est dire que l'évolution de la variable d'état ne dépend pas directement mais seulement indirectement du temps : le temps n'est pas un argument à part entière de la fonction *f*.

$c(t)$ est la variable de contrôle.

$u(.)$ est la fonction d'objectifs instantanée qui dépend généralement des variables d'état et de contrôle et du temps. La somme au cours du temps des fonctions instantanées permet de définir le critère à maximiser *U* appelée fonction d'objectifs inter-temporelle. Le plus souvent le critère à maximiser se présente sous la forme d'une fonction inter-temporelle, il peut plus rarement se présenter sous la forme d'une condition relative à la valeur terminale des variables.

Plus généralement, le problème de contrôle optimal peut être formulé de la manière suivante :

Définition 2. Problème générique de contrôle optimal

$$\max_{c(t)} U \equiv \int_{t_0}^{T} u(c(t), s(t), t)dt + v(s(T), T) \qquad (12)$$

Sous une contrainte dynamique :

$$\dot{s}(t) = f(c(t), s(t), t) \qquad (13)$$

Les conditions initiales étant connues :

$$s(t_0) = s_0 \qquad (14)$$

[8] Introduire une incertitude sur la valeur initiale de la variable d'état complique sérieusement le problème.

Celui-ci diffère du précédent par la condition de transversalité (voir *supra* cette section, paragraphe II. page 26)

II. EXEMPLES D'APPLICATION DU CONTROLE OPTIMAL

Leurs caractéristiques essentielles sont résumées dans le Tableau 1 ci-dessous :

Tableau 1. Exemples de problèmes économiques formulés sous la forme d'un problème de contrôle optimal

Nature du problème	*Formulation*	*Variables de contrôle et d'état, paramètres*	*Condition de transversalité*	*Fonction de comportement*
Arbitrage entre consommation et épargne dans une économie décentralisée (ménage dynastique)	$\max_{\hat{c}(t)} U = \int_{t_0}^{\infty} u(\hat{c}(t)) e^{-(\rho-n)\cdot(t-t_0)} dt$ $\dot{\hat{w}}(t) = (r(t)-n)\hat{w}(t) + s(t) - \hat{c}(t)$ $\hat{w}(t_0) = \hat{w}_0$	$\hat{c}(t)$ consommation individuelle : contrôle $\hat{w}(t)$ richesse matérielle individuelle : variable d'état $r(t)$, $s(t)$, n, ρ	Respect de la contrainte budgétaire inter-temporelle	Fonction de consommation : revenu permanent – cycle de vie
Croissance optimale : arbitrage entre consommation et épargne dans une économie centralisée	$\max_{\hat{c}(t)} U = \int_{t_0}^{\infty} u(\hat{c}(t)) e^{-(\rho-n)\cdot(t-t_0)} dt$ $\dot{k}(t) = f(k(t)) - (e+n+x)k(t) - \hat{c}(t)$ $k(t_0) = k_0$	$\hat{c}(t)$ consommation individuelle : contrôle $k(t)$ capital matériel : variable d'état e, n, x, ρ, technologie de production	Valeur implicite présente du capital final tend vers 0	Fonction de consommation, condition de Keynes Ramsey
Gestion optimale d'une ressource naturelle (épuisable) dans une économie décentralisée	$\max_{x(t)} U = \int_{t_0}^{T} (p(t)x(t) - C(x(t))) e^{-\rho(t-t_0)} dt$ $\dot{s}(t) = -x(t)$ $s(0) = s_0$	$x(t)$ prélèvement de la ressource $s(t)$ stock de la ressource ρ, $p(t)$, technologie d'extraction	Epuisement de la ressource ou bien $s(T) \geq s_{min}$	Règle de Hotelling (ressources épuisables)
Epargne et investissement en capital humain. Double arbitrage entre consommation et épargne et entre activités productives et activités de formation	$\max_{c(t),u(t)} \int_{t_0}^{T} u(c(t)) e^{-(\rho-n)(t-t\ )} dt$ $\dot{h}(t) = \delta h(t)(1-u(t))$ $\dot{k}(t) = y(t) - c(t) - (e+n)k(t)$; $y(t) = f(k(t), u(t)h(t))$ $h(t_0) = h_0$; $k(t_0) = k_0$	$c(t)$ consommation individuelle, $u(t)$ temps (relatif) consacré aux activité productives : variables de contrôle ; $k(t)$ capital matériel, $h(t)$ capital humain : variables d'état δ, ρ, technologie de production, n, e	Valeurs implicites présentes du capital matériel et humain tendent vers zéro	Fonction de consommation Fonction d'investissement dans le capital humain

Tableau 1. Suite

Nature du problème	*Formulation*	*Variables de contrôle et d'état, paramètres*	*Condition de transversalité*	*Fonction de comportement*
Décision d'investissement : rôle de la demande et du coût d'usage du capital Equivalence entre la maximisation du profit inter-temporel et instantané en absence de coût d'installation du capital	$\max_{L(t),I(t)} V = \int_{t_0}^{T} \Pi(\cdot) e^{-\bar{i}(t)\cdot(t-t_0)} dt$ avec $\Pi(\cdot) = p(t) f(K(t), L(t)) - s(t)L(t) - p_K(t) I(t)$ $\dot{K}(t) = I(t) - eK(t)$ $K(t_0) = K_0$	$I(t)$ investissement ; $L(t)$ travail $K(t)$ capital matériel Π profit (nominal) instantané, f technologie de production, $i(t)$ et $\bar{i}(t)$ taux d'intérêt nominal instantané et moyen ; $s(t)$ taux de salaire nominal, $p(t)$ prix des biens ; $p_K(t)$ prix des biens d'équipement ; e taux d'usure du capital	Solvabilité de l'entreprise	Fonction d'investissement de Jorgenson : fondements microéconomiques du principe de l'accélérateur (simple ou flexible) et rôle du coût d'usage du capital : modèle accélérateur – coût d'usage du capital
Décision d'investissement : rôle de la demande et de la profitabilité de l'investissement (variable financière) Valeur de l'entreprise	$\max_{L(t),I(t)} VAN = -(I(t_0) + C(I(t_0))) + \int_{t_1}^{T} \Pi(\cdot) \cdot e^{-\bar{r}(t)\cdot(t-t_0)} dt$ avec $\Pi(\cdot) = f(K(t), L(t)) - s(t)L(t) - (I(t) + C(I(t)))$ $\dot{K}(t) = I(t) - eK(t)$ Si $K(t_0) = 0$ alors $K(t_1) = I(t_0)$	$I(t)$ investissement ; $L(t)$ travail $K(t)$ capital matériel Π profit (réel) instantané, $C(.)$ coût d'installation du capital croissant et convexe en I, f technologie de production, $r(t)$ et $\bar{r}(t)$ taux d'intérêt réel instantané et moyen ; $s(t)$ taux de salaire réel, prix des biens égal au prix des biens d'équipement (numéraire) ; e taux d'usure du capital	Solvabilité de l'entreprise	Fonction d'investissement : modèle accélérateur profit (Tobin, Eisner et Strotz, Malinvaud)

Tableau 2. La croissance optimale : traitement par la méthode de Lagrange et la technique du contrôle optimal

	Méthode de Lagrange	*Contrôle optimal*
Problème posé	$\max U \equiv \sum_{t=t_0}^{T} \frac{u(\hat{c}(t))}{(1+\rho)^{(t-t_0)}}$ sous $k(t+1) = f(k(t)) + (1-(e+n+x)k(t)) - \hat{c}(t)$; Condition initiale : $k(t_0) = k_0$	$\max U = \int_{t_0}^{\infty} u(\hat{c}(t)) \cdot e^{-(\rho-n)\cdot(t-t_0)} dt$ sous $\dot{k}(t) = f(k(t)) - (e+n+x) \cdot k(t) - \hat{c}(t)$; Condition initiale : $k(t_0) = k_0$
Condition de transversalité :	$k(T+1)$ connu : valeur présente du capital de long terme égale à 0	$\hat{w}(T)$ connu : respect de la contrainte budgétaire inter-temporelle
Variables de choix	$\hat{c}(t)$, $t = t_0, \ldots, T$; $k(t)$, $t = t_1, \ldots, T$	$\hat{c}(t)$, $t = t_0, \ldots, T$
Fonction à maximiser	$\ell(c(t_0), \cdots, c(T), k(t_1), \cdots, k(T), \lambda(t_1), \cdots, \lambda(T)) \equiv$ $\sum_{t=t_0}^{T} \frac{u(\hat{c}(t))}{(1+\rho)^{(t-t_0)}} + \sum_{t=t_0}^{T} \lambda(t+1) f(k(t)) + (e+n+x)k(t) - \hat{c}(t)$ $+ \lambda(t_1)k(t_0) + \sum_{t=t_1}^{T} (\lambda(t+1) - \lambda(t))k(t) - \lambda(T+1)k(T+1)$	$\mathrm{H}(\hat{c}(t), \hat{w}(t), \pi(t), t) \equiv u(\hat{c}(t))e^{-\rho(t-t_0)} +$ $\pi(t)(f(k(t)) - (e+n+x) \cdot k(t) - \hat{c}(t))$
Conditions nécessaires du 1er ordre	$\frac{\partial \ell^*}{\partial \hat{c}(t)} = 0$; $\hat{c}^*(t) > 0$; $t = t_0, \ldots, T$ $\frac{\partial \ell^*}{\partial k(t)} = 0$; $t = t_1, \ldots, T$ $\frac{\partial \ell^*}{\partial \lambda(t)} = 0$; $\lambda^*(t) > 0$; $t = t_1, \ldots, T$	$\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial \hat{c}(t)} = 0$; $\hat{c}^*(t) > 0$; $t = t_0, \ldots, T$ $\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial k(t)} + \dot{\pi}(t) = 0$; $t = t_0, \ldots, T$ $\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial \pi(t)} = \dot{k}(t)$

Tableau 3. Pollution optimale : traitement par la méthode de Lagrange et la technique du contrôle optimal

On étudie une économie où les activités de production sont polluantes. La production Q est réalisée à partir d'une ressource naturelle (au sens large) qui émet des polluants en quantité S. La technologie de production est implicite et apparaît dans la fonction de transformation du bien produit – émissions $\phi(Q, S)$. Cette fonction implicite indique le niveau minimum d'émissions S pour un niveau donné de Q. Dans le plan (Q, S) cette fonction est croissante ($\phi'_Q > 0$ et $\phi'_S < 0$). Les émissions polluantes S accroissent le stock de polluant Z, dont une fraction γ est absorbée à chaque période. Le profit dépend de Q et le stock de polluant engendre un coût D. Il existe un arbitrage entre polluer aujourd'hui et demain

	Méthode de Lagrange	*Contrôle optimal*
Problème posé	$\max U \equiv \sum_{t=t_0}^{T} \rho^t \left(\pi(Q(t)) - D(Z(t))\right)$ sous $Z(t+1) = (1-\gamma)Z(t) + S(t)$; $\phi(Q(t), S(t)) = 0$; $Q_{\max} \leq Q(t) \leq Q_{\min}$ Condition initiale : $Z(t_0) = Z_0$	$\max U = \int_{t_0}^{\infty} \left(\pi(Q) - D(Z)\right)dt$ sous $\dot{Z}(t) = -\gamma Z(t) + S(t)$; et $\phi(Q(t), S(t)) = 0$ Condition initiale : $Z(t_0) = Z_0$
Variables de choix	$Q(t)$, $t = t_0, \ldots, T$; $S(t)$, $t = t_0, \ldots, T$; $Z(t)$, $t = t_1, \ldots, T$	$Q(t)$, $t = t_0, \ldots, T$; $S(t)$, $t = t_0, \ldots, T$;
Fonction à maximiser	$\ell(Q(t_0), \cdots, Q(T), S(t_0), \cdots, S(T), Z(t_1), \cdots, Z(T), \lambda(t_1), \cdots, \lambda(T), \mu(t_0), \cdots, \mu(T)) \equiv$ $\sum_{t=t_0}^{T} \rho^t \left(\pi Q(t) - D(Z(t))\right) +$ $\rho\lambda(t+1)\left((1-\gamma)Z(t) + S(t) - Z(t+1)\right) - \mu(t)\phi(Q(t), S(t))$	$\mathrm{H}(Q(t), S(t), Z(t), \lambda(t), \mu(t)) \equiv \pi(Q) - D(Z)$ $+ \lambda(t)\left(-\gamma Z(t) + S(t)\right) + \mu(t)\phi(Q(t), S(t))$
Conditions nécessaires du 1[er] ordre	$\frac{\partial \ell^*}{\partial Q(t)} = 0 \Leftrightarrow \pi'_Q - \mu(t)\phi'_Q = 0$; $Q(t) > 0$; $t = t_0, \ldots, T$ $\frac{\partial \ell^*}{\partial S(t)} = 0 \Leftrightarrow \rho\lambda(t+1) - \mu(t)\phi'_S = 0$; $S(t) > 0$; $t = t_0, \ldots, T$ $\frac{\partial \ell^*}{\partial Z(t)} = 0 \Leftrightarrow -D_Z + \rho\lambda(t+1)(1-\gamma) - \lambda(t) = 0$; $t = t_1, \ldots, T$ $\frac{\partial \ell^*}{\partial \lambda(t)} = 0$; $\lambda(t) > 0$; $t = t_1, \ldots, T$ $\frac{\partial \ell^*}{\partial \mu(t)} = 0$	$\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial Q(t)} = 0$; $Q(t) > 0$; $t = t_0, \ldots, T$ $\frac{\partial H^*}{\partial S(t)} = 0 \Leftrightarrow \lambda(t) - \mu(t)\phi'_S = 0$ $\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial Z(t)} + \dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t) = 0$; $t = t_0, \ldots, T$ $\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial \lambda(t)} = \dot{Z}(t)$ $\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial \mu(t)} = 0 \Leftrightarrow \phi(t) = 0$

D'après : Conrad, JM. 1999

Il s'agit du modèle proposé par Cass, D. 1965 et Koopmans, TJ. 1965. On peut l'amender pour introduire un double arbitrage entre consommation présente et future, mais aussi entre activités de formation et productives pour décrire l'influence du capital humain dans la croissance économique (Lucas, RE. 1988)

III. LA FONCTION DE HAMILTON

La fonction de Hamilton correspondante au problème (8) à (10) formulée en temps continu est :

$$\mathrm{H}(c,s,\pi,t) \equiv u((c,s,t)) + \pi(t) f((c,s,t)) \qquad (15)$$

π est un multiplicateur dynamique qui dépend du temps et des variables d'état et de contrôle. On l'appelle variable conjuguée ou encore co-variable d'état. On peut montrer qu'elle permet de mesurer l'effet marginal d'une modification de la variable d'état sur le critère inter-temporel U évalué à l'optimum : raison pour laquelle on l'appelle prix implicite de la variable d'état (*cf.* Section 3. paragraphe III. Page 30)

Dans la formulation du problème (8) - (10) on précise la valeur terminale de la variable d'état. Les conditions relatives au système dynamique portant sur la date terminale sont appelées conditions de transversalité. D'autres conditions de transversalité peuvent être imposées (*cf.* Section 3. Paragraphe II. à partir de la page 26)

On peut prend en compte des contraintes statiques comme par exemple des contraintes de non négativité des variables de contrôle ou une contrainte budgétaire statique. Dans ce cas on forme une fonction de Lagrange à partir de la fonction de Hamilton.

La fonction de Hamilton formulée en temps discret est :

$$\mathrm{H}(c,s,\pi,t) \equiv u((c,s,t)) + \pi(t+1) f((c,s,t))$$

Remarque. Cette écriture suppose que le multiplicateur dynamique soit appliqué en t + 1. S'il ne l'est pas, cela peut conduire à des résultats faux lors de l'établissement de la condition de l'optimum dynamique qui repose sur la dérivée partielle de la fonction de Hamilton par rapport à la variable d'état. Pour un exemple, *cf. infra* Tableau 3 page 20.

Section 3. Conditions d'optimalité

Généralement, on énonce des conditions nécessaires qui sont connues sous le nom du Principe du Maximum de Pontryagine (PMP) dans le paragraphe I. , que l'on doit compléter par les conditions de transversalité (paragraphe II.). Les conditions d'optimalité peuvent faire l'objet d'une interprétation économique (paragraphe III.)

Encadré 2. Le principe de Bellman

"An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision." Source: Bellman, R., 1957

I. LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGINE

On dit que les triplets ($c(t)$, $s(t)$, $\pi(t)$) constituent une solution optimale au problème (8) à (10) si les conditions suivantes sont vérifiées :

La variable de contrôle $c(t)$ maximise la fonction de Hamilton c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial c(t)} = 0 \text{, quel que soit } t \in [t_0, T] \tag{16}$$

Les variables d'état et le multiplicateur satisfont une paire d'équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s(t)} + \dot{\pi}(\ ) = 0 \text{ , quel que soit } t \in [t_0, T] \tag{17}$$

$$\text{et } \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \pi(t)} = \dot{s}(t) \text{ , quel que soit } t \in [t_0, T] \tag{18}$$

En utilisant la définition de la fonction de Hamilton il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial c(t)} + \pi(t)\frac{\partial f}{\partial c(t)} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s(t)} + \pi(t)\frac{\partial f}{\partial s(t)} + \dot{\pi}(t) = 0 \tag{20}$$

$$f\left(c(t), s(t), t\right) = \dot{s}(t) \tag{21}$$

Le triplet optimal ($c(t)$, $s(t)$, $\pi(t)$) doit donc satisfaire les conditions (16) à (18). Le PMP implique donc une condition statique, une condition dynamique donnant l'évolution du multiplicateur au cours du temps et le respect de la contrainte gouvernant l'évolution de la variable d'état. La condition (18) n'équivaut pas à (9) : il s'agit de la contrainte (9) compte tenu du contrôle optimal. Les conditions (17) et (18) constituent les équations canoniques de Hamilton.

On dit qu'à l'optimum :

La variable de contrôle u est le contrôle optimal ;
La variable d'état s est la trajectoire optimale.

A. Les problèmes autonomes

On peut étudier une catégorie de problèmes dits autonomes. Généralement ils sont formulés de la manière suivante : :

Définition 3. Un problème autonome de contrôle optimal

$$\max_{c(t)} U \equiv \int_{t_0}^{T} u(c(t), s(t))e^{-\rho(t-t_0)}dt \qquad (8a)$$

Sous la contrainte dynamique :

$$\dot{s}(t) = f(c(t), s(t)) \qquad (9a)$$

Et la condition initiale :

$$s(t_0) = s_0 \qquad (10a)$$

La différence avec le problème initial vient de :

La fonction d'objectifs. Celle-ci dépend du temps d'une manière particulière dans la mesure où le temps n'influence l'objectif qu'au travers le facteur d'actualisation ;

La contrainte dynamique instantanée. Celle-ci est une équation différentielle autonome : le temps n'a pas d'influence directe sur l'évolution de la variable d'état ; il n'intervient qu'au travers les variables d'état et de contrôle qui évoluent au cours du temps.

La résolution d'un problème de ce type peut être simplifiée. En effet on peut utiliser la fonction de Hamilton en valeur courante :

$$\tilde{H}(c(t), s(t), \lambda(t)) \equiv u(c(t), s(t)) + \lambda(t)f(c(t), s(t))$$ où $\lambda(t)$ est le multiplicateur en valeur courante

On rappelle que la fonction de Hamilton en valeur présente est la suivante :

$\mathrm{H}(c(t), s(t), \lambda(t)) \equiv u(c(t), s(t))e^{-\rho(t-t_0)} + \pi(t)f(c(t), s(t))$ où $\pi(t)$ est le multiplicateur en valeur présente

On peut établir aisément le lien entre ces 2 fonctions et les 2 multiplicateurs dynamiques :

$\tilde{\mathrm{H}}(c(t), s(t), \lambda(t))e^{-\rho(t-t_0)} \equiv \mathrm{H}(c(t), s(t), \pi(t), t)$ avec $\lambda(t)e^{-\rho(t-t_0)} = \pi(t)$

Ensuite on peut décliner les conditions d'optimalité en utilisant la fonction de Hamilton en valeur courante :

Tableau 4. Le principe du maximum de Pontryagine d'un problème autonome

Hamiltonien présent	*Hamiltonien courant*
$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial c(t)} = 0$	$\frac{\partial \tilde{\mathrm{H}}}{\partial c(t)} = 0$
$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s(t)} + \dot{\pi}(t) = 0$	$\frac{\partial \tilde{\mathrm{H}}}{\partial s(t)} + \dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t) = 0$
$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \pi(t)} = \dot{s}(t)$	$\frac{\partial \tilde{\mathrm{H}}}{\partial \lambda(t)} = \dot{s}(t)$

On peut remarquer que la condition d'absence d'arbitrage stipule qu'à l'optimum l'impact marginal de la modification de la variable d'état est toujours égale à la diminution en valeur présente du prix implicite de la variable d'état. On a en effet :

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} - \rho = \frac{\dot{\pi}(t)}{\pi(t)}$$

Le taux de rendement implicite de la variable d'état en valeur présente est égal au taux de variation du prix implicite courant diminué du taux de préférence pour le présent.

L'intérêt des problèmes autonomes est que les équations canoniques de Hamilton forment elles-mêmes un système d'équations différentielles autonomes. Leur solution (c^*, s^*) c'est-à-dire les couples de valeurs ($c(t)$, $s(t)$) qui sont solution des équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathrm{H}}}{\partial s(t)} + \dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t) = 0 \\ \dot{s}(t) = 0 \end{cases}$$ sont constants par rapport au temps.

B. *Prise en compte de contraintes statiques*

Le problème générique (8) à (10) (page 14) peut être modifié pour tenir compte de contraintes de non négativité de(s) variable(s) de contrôle ou de contraintes plus générales impliquant la(es) variable(s) de contrôle : :

Définition 4. Un problème de contrôle optimal avec contraintes statiques

$$\max_{c(t)} U \equiv \int_{t_0}^{T} u(c(t), s(t), t)\,dt \tag{8b}$$

sous :

$$\dot{s}(t) = f(c(t), s(t), t) \tag{9b}$$

Condition initiale : :

$$s(t_0) = s_0 \tag{10b}$$

Contraintes de non négativité :

$$c(t) \geq 0 \tag{22}$$

Contraintes statiques :

$$g(c(t), s(t), t) \leq 0 \tag{23}$$

On considère également la condition de transversalité : $s(T) = s_T$

Pour résoudre de manière commode le problème précédent, on peut définir la fonction de Lagrange suivante :

$$\ell(c(t), s(t), \pi(t), \mu(t), t) \equiv \mathrm{H}(c(t), s(t), \pi(t), t) - \mu(t) g(c(t), s(t), t) \tag{24}$$

Le principe du Maximum est modifié de la manière suivante :

$$\frac{\partial \ell}{\partial c(t)} \leq 0 \text{, quel que soit } t \in [t_0, T] \tag{25}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial s(t)} + \dot{\pi}(\ ) = 0 \text{ , quel que soit } t \in [t_0, T] \tag{26}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \pi(t)} = \dot{s}(t) \text{ , quel que soit } t \in [t_0, T] \tag{27}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu(t)} \geq 0 \text{, } \mu(t) \geq 0 \text{ et } \mu(t)\frac{\partial \ell}{\partial \mu(t)} = 0 \text{, quel que soit } t \in [t_0, T] \tag{28}$$

Remarques :

La variable de contrôle et le multiplicateur statique sont des fonctions implicites de la variable d'état et du multiplicateur dynamique ;

On peut ajouter d'autres contraintes statiques dans la mesure où la condition de qualification des contraintes statiques est vérifiée. Dans le cas particulier d'une variable de contrôle et d'une variable d'état, la condition de qualification est vérifiée. Pour le cas général voir Léonard, D. & N.V. Long 1992, p. 189 ;

On peut ajouter des contraintes sous la forme d'intégrales qui reviennent non pas à imposer une contrainte en tout point de l'horizon temporel mais à imposer une contrainte sur l'ensemble de la trajectoire des variables au cours du temps : *cf.* Léonard, D. & N.V. Long 1992, p. 190 et suivantes.

II. LES CONDITIONS DE TRANSVERSALITE

Le problème (8) - (10) précise la valeur terminale de la variable d'état qui est donc dans ce cas une variable exogène pouvant donner lieu à une analyse de sensibilité. Cette condition est appelée condition de transversalité. Celle-ci spécifie l'état du système économique à la fin de l'horizon temporel. Les conditions de transversalité peuvent cependant prendre d'autres formes. On peut les classer en 2 catégories :

Elles concernent la valeur terminale de la variable d'état $s(T)$: dans ce cas T la durée du problème est une donnée exogène : paragraphe A ;

Ou bien la date terminale T : la durée devient une inconnue : paragraphe B.

On trouvera une revue plus complète des conditions de transversalité dans Léonard, D. & N.V. Long 1992 chapitre 7). On part du problème générique de contrôle optimal

A. *Conditions portant sur la valeur de la variable d'état*

On part du problème générique de contrôle optimal : (8) - (10). 3 cas sont évoqués : variable d'état terminale libre (paragraphe 1) variable d'état terminale contrainte par valeur minimale (paragraphe 2) et prise en compte d'une fonction de valeur de la variable d'état en T (paragraphe 3)

1. Variable d'état terminale libre

Faire l'hypothèse que $s(T)$ est libre signifie qu'elle n'est pas spécifiée de manière exogène. Dans ce cas, la valeur terminale du multiplicateur dynamique est spécifiée de manière particulière puisqu'il s'annule : :

$$\pi(T) = 0 \tag{29}$$

L'interprétation de cette condition est immédiate puisqu'elle revient à considérer que l'impact marginal de la variable d'état en T sur l'objectif évalué à l'optimum, est nul :

$$\frac{\partial U^*}{\partial s(T)} = 0$$

2. Variable d'état terminale contrainte par valeur minimale

On peut imposer une contrainte par valeur minimale sur la variable d'état qui est intéressante dans des problèmes de gestion optimale de stocks. On peut en effet envisager que le stock ne diminue pas en deçà d'une valeur minimale :

$$s(T) \geq s_{min}$$

On peut traiter ce cas de manière analogue à une contrainte statique en T où le multiplicateur est particulier puisqu'il s'agit du multiplicateur dynamique :

$$\pi(T) \geq 0,\ s(T) - s_{min} \geq 0 \text{ et } \pi(T)(s(T) - s_{min}) = 0 \qquad (30)$$

On peut considérer que cette condition de transversalité découle d'un problème d'optimisation comme le suivant :

$\max\limits_{s(T)} U^*$ sous $s(T) - s_{min} \geq 0$, dont la fonction de Lagrange correspondante est :

$$\ell \equiv U^* + \mu\left(s(T) - s_{\min}\right)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont :

$$\frac{\partial \ell}{\partial s(T)} = 0 \text{ soit } \frac{\partial U^*}{\partial s(T)} = -\mu$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} \geq 0,\ \mu \geq 0 \text{ et } \mu \frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0 \text{ soit, } s(T) - s_{\min} \geq 0,\ \mu \geq 0 \text{ et } \mu\left(s(T) - s_{\min}\right) = 0$$

1er cas : $\mu = 0$. Il vient $\frac{\partial U^*}{\partial s(T)} = 0$ et $s(T) = s_{min}$: la contrainte est saturée ce qui revient au cas où la variable terminale est libre ;

2ème cas : $\mu > 0$. Il vient $\frac{\partial U^*}{\partial s(T)} < 0$ et $s(T) > s_{min}$. Lorsque la contrainte est insaturée, l'accroissement marginal de $s(T)$ sur l'objectif inter-temporel évalué à l'optimum est négatif.

Ces 2 cas de figure peuvent être rapprochés de l'interprétation du multiplicateur en T :[9]

$$\frac{\partial U^*}{\partial s(T)} = -\pi(T)$$

Il vient donc que le multiplicateur μ est le multiplicateur dynamique en T d'où la condition de transversalité (30)

3. Prise en compte d'un critère terminal

On peut considérer un problème de contrôle optimal dont la fonction d'objectifs comporte outre le critère inter-temporel U un critère terminal ne prenant en compte que les valeurs terminales des variables d'état. Cet objectif généralisé s'écrit de la manière suivante (*cf.* équation 8) :

$$\int_{t_0}^{T} u(c(t), s(t), t)dt + v(s(T), T) \tag{31}$$

Cette fonction v (*scrap value function*) peut s'imposer dans des problèmes où l'agent économique attache une valeur particulière à ce qui restera à la fin de l'horizon temporel. Par exemple, v peut représenter

La valeur maximale d'un flux d'utilité futur à partir de la date T dont la condition initiale est $s(T)$;

La valeur de revente d'un stock (*cf.* Léonard, D. 2000 p. 162 pour une illustration de cette condition de transversalité dans le cas d'un problème de gestion d'une ressource naturelle).

La condition de transversalité correspondante porte sur la valeur terminale du multiplicateur :

$$\pi(T) = \frac{\partial v(s(T), T)}{\partial s(T)} \tag{32}$$

Cette condition stipule que le multiplicateur est égal à l'utilité ou au bénéfice marginal terminal lié à la détention du stock (*cf.* démonstration in Léonard, D. & N.V. Long 1992 p. 227-8)

[9] *Cf.* paragraphe III. A l'interprétation du multiplicateur en T qui établit un résultat plus général de l'impact marginal de la variable d'état $s(T)$ sur U^*

B. Conditions portant sur la date terminale

On peut relâcher l'hypothèse du caractère exogène de la durée de l'horizon temporel. Ceci se justifier dans des problèmes de durée, notamment dans les problèmes de gestion des ressources naturelles, où les agents économiques sont libres de continuer d'exploiter la ressource représentée par la variable d'état. On peut envisager deux cas en fonction de la formulation de la fonction d'objectif.

Dans l'hypothèse où le critère à maximiser est un critère inter-temprel simple U (*cf.* équation 8), la condition de transversalité est :

$$\mathrm{H}(s(T), c(T), \pi(T), T) = 0,\ T < \infty \qquad (33)$$

On peut montrer (Léonard, D. & N.V. Long 1992, pp. 241-1) que cette expression est elle-même égale à l'impact d'une variation marginale de l'horizon temporel sur l'objectif évalué à l'optimum :

$\dfrac{\partial U(b,T)}{\partial T} = \mathrm{H}(s(T), c(T), \pi(T), T)$ avec b la valeur de $s(T)$ qui découle du PMP

Cela signifie que la durée optimale du problème est telle qu'elle maximise l'objectif évalué à l'optimum, tel qu'il découle du PMP. La condition d'optimalité stipule que l'effet marginal s'annule pourvu que la variable de choix soit finie. On peut aussi rapprocher la condition de transversalité (33) de l'interprétation de la fonction de Hamilton (*cf.* paragraphe III. A)

Dans l'hypothèse où le critère à maximiser est un critère inter-temprel augmenté d'une fonction de valeur terminale h la condition de transversalité devient :

$$\mathrm{H}(s(T), c(T), \pi(T), T) + \frac{\partial h(b,T)}{\partial T} = 0 \qquad (\mathbf{34})$$

On peut montrer que cette condition découle de la maximisation de $U(b, T) + h(b, T)$[10]

[10] *Cf.* Léonard, D. & N.V. Long 1992 p. 245

III. INTERPRETATIONS

L'interprétation proposée ici correspond au problème originel de maximisation de la fonction (8) sous la contrainte dynamique (9) avec pour condition initiale (10) et la condition de transversalité $s(T) = s_T$.

A. Les multiplicateurs dynamiques et la fonction de Hamilton

1. Les multiplicateurs

On peut établir les résultats suivants (Léonard, D. & N.V. Long 1992 p. 153 et suivantes) dans le cas du problème générique de contrôle optimal (Définition 1 p. 14) :

$$\frac{\partial U^*}{\partial s_0} = \pi(t_0) > 0 \ , \ \frac{\partial U^*}{\partial s_T} = -\pi(T) < 0 \qquad (35)$$

Si on dispose d'une unité supplémentaire de la variable d'état (un stock) en début d'horizon temporel alors cela accroît l'objectif évalué à l'optimum ; de la même façon si l'agent économique décide d'accroître à la marge la variable d'état alors cela diminue l'objectif évalué à l'optimum. On peut montrer qu'en tout point du temps τ distinct du début et de la fin de l'horizon temporel :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial U^*}{\partial \alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{P}(\tau + \varepsilon) - \mathrm{P}(\tau)}{\varepsilon} = \pi(\tau) \qquad (36)$$

$\mathrm{P}(t)$ est une primitive de $\pi(t)$; α une constante arbitraire faisant varier $\dot{w}$; $\tau \in \,]t_0\,;\,T\,[$. En prenant $\alpha = 1$ on peut interpréter $\pi(t)$ comme la valeur en termes de bien-être inter-temporel U de l'addition d'une unité supplémentaire de s en t.

Plusieurs interprétations.

Le multiplicateur $\pi(t)$ est la valeur dont s'accroît la fonction d'objectifs inter-temporelle évaluée sur le sentier optimal quand on augmente d'une unité la variable d'état ;

Est donc le prix implicite, évalué en termes de bien-être inter-temporel optimum, de la variable d'état.

Si on modifie à la marge la valeur de la variable d'état à l'optimum en τ, cela modifie celle-ci aux périodes suivantes. L'effet total en termes du critère inter-temporel optimal est simplement mesuré par le multiplicateur. C'est la raison pour laquelle on dit que le multiplicateur est le prix implicite de la variable d'état.

2. La fonction de Hamilton

La fonction de Hamilton peut être interprétée comme un indice d'utilité dynamique (instantané) défini comme la somme de l'objectif instantané $u(t)$ auquel on ajoute la valeur en terme de bien-être de la contrainte dynamique (on omet les indices du temps) :[11]

$$\mathrm{H}(c, s, \pi, t) \equiv u((c, s, t)) + \pi f((c, s, t)) \tag{15}$$

La variable d'état représentant un stock, la fonction de Hamilton tient compte non seulement de la satisfaction instantanée (u utilité ou profit) mais aussi de la valeur (en terme de U) de l'évolution du stock π x f. La fonction de Hamilton résume bien un arbitrage inter-temporel entre diminuer maintenant (directement ou indirectement) la variable d'état : si prélever une unité supplémentaire accroît la satisfaction instantanée elle diminue la satisfaction future en raison de la baisse de la variable d'état.

3. Exemples

a) Valeur de l'entreprise

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\max_{c(t), t\in[0;T]} U \equiv \int_0^T u(c,s,t)dt + v(s(T),T) \text{ sous } \dot{s}(t) = f(c,s,t) \text{ et } s(0) = s_0$$

La fonction u représente le profit instantané mesuré en € par unité de temps et v est la valeur de récupération ; f est la contrainte dynamique d'accumulation du capital productif. La fonction de Hamilton est la suivante :

$$\mathrm{H}(c,s,\pi,t) \equiv u(c,s,t) + \pi f(c,s,t)$$

En multipliant la fonction de Hamilton par dt et compte tenu de la contrainte dynamique :

$$\mathrm{H}(c,s,\pi,t)dt \equiv u(.)dt + \pi f(.)dt = u(.)dt + \pi\dot{s}dt = u(.)dt + \pi ds$$

Avec:

$u(c,s,t)dt$: la contribution directe à U en € de sur la période t à $t+dt$;

πds : la contribution indirecte à U en € ;

$\mathrm{H}(c,s,\pi,t)dt$: la contribution totale quand $s(t)$ égale s et $u(t) = u$ sur l'intervalle [t ; $t+dt$]

D'après la condition de l'optimum dynamique et la condition de transversalité :

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s} = -\frac{\partial u}{\partial s} - \pi\frac{\partial f}{\partial s} \text{ ; } \pi(T) = \frac{\partial v(s(T),T)}{\partial s} \text{ il vient :}$$

$$-d\pi = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s}dt = \frac{\partial u}{\partial s}dt - \pi\frac{\partial f}{\partial s}dt$$

Avec :

$-d\pi$ le coût marginal de détention du capital de t à $t+dt$;

$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s}dt$ est le revenu marginal résultant de l'accumulation de capital avec $\frac{\partial u}{\partial s}dt$ la contribution directe et $\pi\frac{\partial f}{\partial s}dt$ la contribution indirecte. Par conséquent la condition de l'optimum dynamique que le coût marginal égale le revenu marginal lié à la détention de capital de t à $t+dt$.

b) Fonction de Hamilton et épargne véritable

La démarche initiée sur les indicateurs de dd s'appuie sur un cadre théorique maintenant bien défini comme celui proposé comme dans Hamilton, K. & M. Clemens, 1999, p. 334 ou dans Hamilton, K. & G. Atkinson, 2006, chapitre 3. Le modèle est le suivant :

$$\max W \equiv \int_0^{\infty} u(C,B)e^{-\rho t}dt \text{ , } 0<\rho<1$$

où u est la fonction d'utilité qui dépend de la consommation agrégée C et des services environnementaux B qui dépendent négativement du stock de polluants : $B = \alpha(X)$;

Les contraintes :

$F(K,R,N) = C + \dot{K} + a + m$: contrainte emplois-ressources qui détermine l'évolution du stock de capital physique. K, R, N sont resp. le capital physique, les flux de RN et N le capital humain qui sont combinés dans la technologie de production macroéconomique f. m est l'investissement en capital humain. La fonction $q(m)$ transforme les dépenses d'éducation en en capital humain qui ne se déprécie pas : $\dot{N} = q(m)$. Le travail est fixe et n'apparaît donc pas dans la technologie de production ;

[11] *Cf.* Léonard, D. 2000 p. 160

$\dot{X} = e - d(X)$: accumulation de polluants dont le stock est mesuré par *X*. Les émissions polluantes sont une fonction de la production et de la réduction de la pollution *a* : $e = e(F, a)$ et le stock de polluants s'accumule $\dot{X} = e - d(X)$ avec *d* qui représente la capacité d'assimilation de la pollution par l'environnement ;
$\dot{S} = -R + g$: exploitation des ressources naturelles, dont on prélève *R* et qui se renouvellent selon la fonction $g(S)$;

Il faut ensuite résoudre le problème de contrôle optimal, en formant la fonction de Hamilton en valeur courante :

$$\mathrm{H}(K, X, S, N) \equiv u(C, B) + \gamma_K \dot{K} + \gamma_X \dot{X} + \gamma_S \dot{S} + \gamma_N \dot{N} \text{ soit}$$
$$\mathrm{H}(K, X, S, N) \equiv u(C, B) + \gamma_K (F(K, R, N) - C - a - m)$$
$$+ \gamma_X (e(F(K, R, N), a) - d(X)) + \gamma_S (-R + g(S)) + \gamma_N q(m)$$

Les CPO par rapport aux variables de contrôle : *C*, *R*, *m*, *a* sont les suivantes :

$$\frac{\partial \mathrm{H}(K, X, S, N)}{\partial C} = 0 \Leftrightarrow u'_C - \gamma_K = 0 \; ; \; \frac{\partial \mathrm{H}(K, X, S, N)}{\partial R} = 0 \Leftrightarrow \gamma_K f'_R + \gamma_X e'_F f'_R - \gamma_S = 0 \; ;$$
$$\frac{\partial \mathrm{H}(K, X, S, N)}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow -\gamma_K + \gamma_X e'_a = 0 \; ; \; \frac{\partial \mathrm{H}(K, X, S, N)}{\partial m} = 0 \Leftrightarrow -\gamma_K + \gamma_N q' = 0$$

Il vient les expressions des prix implicites du capital physique, de la RN, de la pollution et du capital humain :

$\gamma_K = u'_C$; $\gamma_N = \dfrac{u'_C}{q'}$; $\gamma_X = \dfrac{\gamma_K}{e'_a} = \dfrac{u'_C}{e'_a} \equiv -u'_C b$ avec *b* le coût marginal de la dépollution $b \equiv -\dfrac{1}{e'_a}$ qui correspond aussi à la taxe pigouvienne ; $\gamma_S = u'_C f'_R - b e'_f f'_R$

Et l'expression de la fonction de Hamilton, où les prix implicites sont remplacés par leur valeur à l'optimum :

$$\mathrm{H}(K, X, S, N) \equiv u(C, B) + u'_C \left(\underset{(1)}{\underbrace{F - C - a - m}_{\dot{K}}} \quad - \quad \underset{(2)}{b\underbrace{(e - d)}_{-\dot{X}}} \quad + \quad \underset{(3)}{f'_R (1 - b e'_f) \underbrace{(-R + g)}_{\dot{S}}} \quad + \quad \underset{(4)}{\underbrace{\frac{q'}{q}}_{\dot{N}}} \right)$$

Tous les éléments du stock total de capital (1 à 4) sont évalués à leur valeur implicite à l'optimum. La fonction de Hamilton est un indicateur de bien-être, compte tenu de la valeur implicite de la variation des différentes variables d'état (1 à 4) :

$$G \equiv \left(\underbrace{F - C - a - m}_{\dot{K}} \quad - \quad b\underbrace{(e - d)}_{-\dot{X}} \quad + \quad f'_R\left(1 - be'_f\right)\underbrace{(-R + g)}_{\dot{S}} \quad + \quad \underbrace{\frac{q'}{q}}_{\dot{N}} \right)$$
$$(1) \qquad\qquad (2) \qquad\qquad (3) \qquad\qquad (4)$$

Si les RN sont épuisables, $g = 0$; si la capacité d'absorption des polluants est nulle, $d = 0$. Il peut être montré que la valeur courante de la fonction de Hamilton est directement liée à la valeur maximale de la fonction d'objectifs :

$$\mathrm{H}(.) \equiv u + u'_C G = \rho W \text{ et } u'_C G = \rho \int_0^{\infty} u(C, B) e^{-\rho t} dt - u = \dot{W}$$

B. Le principe du maximum

On considère d'abord la condition de l'optimum instantané : $\underbrace{\frac{\partial u}{\partial c(t)}}_{(\mathrm{I})} - \underbrace{\pi(t)\frac{\partial f}{\partial c(t)}}_{(\mathrm{II})} = 0$

L'expression (I) traduit l'effet direct et instantané à la date t d'une modification du contrôle optimal sur l'objectif inter-temporel U^* : généralement cet effet est positif et mesuré par la dérivée de l'objectif instantané en t

L'expression (II) traduit l'effet d'une telle modification sur l'évolution du stock (variable d'état) évalué en terme de bien-être. Cet effet est un effet indirect sur U^* parce qu'il passe d'abord par l'évolution de la variable d'état. Cet effet n'est pas instantané car il affecte (indirectement) U en t mais aussi aux périodes suivantes. L'expression (I) représente le bénéfice marginal de l'accroissement du contrôle optimal ; l'expression (II) en est le coût marginal en terme de bien-être ; à l'optimum statique, les 2 effets s'annulent.

On considère ensuite la condition de l'optimum dynamique :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial s(t)} + \pi(t)\frac{\partial f}{\partial s(t)}}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\dot{\pi}(t)}_{(\mathrm{II})} = 0$$

Elle est une condition d'absence d'arbitrage. Si l'agent économique décide d'accroître à la marge le stock de la variable, il obtient à la marge un supplément de bien-être mesuré par (I) qui tient compte de l'impact sur l'objectif et l'impact indirect transitant par l'évolution de la variable de stock.

Ce faisant, la variable d'état est plus abondante et sa valorisation c'est-à-dire son prix implicite (II) diminue. A l'optimum le supplément de bien-être égale la moins-value : c'est dire l'agent économique ne désire ni plus ni moins de la variable d'état. Il ne peut réaliser de gain (ou de perte) supplémentaire lié(e) à la détention d'une unité de plus (ou de moins) de stock.

IV. VENTE D'UNE DENREE PERISSABLE PAR UNE ENTREPRISE EN SITUATION DE MONOPOLE

On considère une entreprise qui doit vendre le stock d'un produit sur l'intervalle de temps [t_0 ; T]. Son objectif est de maximiser la recette inter-temporelle de cette vente. Partant de du stock initial en t_0 égal à x_0 connu, le stock du produit décroît sous l'effet des ventes $u(t)$ et de la dépréciation du stock supposé être égale à $\alpha.x(t)$ à la date t ($0<\alpha<1$). A la date T, le stock devra être épuisé. L'entreprise est supposée être en situation de monopole *i.e.* la demande du marché se confond avec celle qui s'adresse à l'entreprise et cette demande est supposée être iso-élastique :

$u(t) = Ap(t)^{-\varepsilon}$ A est un paramètre strictement positif et ε est l'élasticité de la demande, $p(t)$ est le prix de marché.

1) Quelles sont les variables d'état et de contrôle ? Ecrire les fonctions de profit instantané et inter-temporel de l'entreprise.

u variable de contrôle, x variable d'état, fonction de profit instantané : $p(t)u(t) = A^{1/\varepsilon}u(t)^{1-1/\varepsilon}$, fonction inter-temporelle de profit : $A^{1/\varepsilon}\int_{t_0}^{T} u(t)^{1-1/\varepsilon}dt$. Il y a bien un arbitrage inter-temporel (vendre maintenant ou plus tard) dans la mesure où l'agent économique a intérêt :

A vendre rapidement pour éviter les pertes, proportionnelles au stock détenu ;

A retarder la vente puisque l'on montre que le prix augmente au cours du temps.

2) Quelle est l'expression de la fonction décrivant l'évolution de la variable d'état ?

$\dot{x}(t) = -u(t) - \alpha x(t)$ le stock diminue sous l'effet conjoint du prélèvement et de la dépréciation du stock

3) Ecrire le problème de l'entreprise sous la forme d'un problème de contrôle optimal et la fonction de Hamilton correspondante.

$\max_{u(t)} A^{1/\varepsilon}\int_{t_0}^{T} u(t)^{1-1/\varepsilon}dt$ sous $\dot{x}(t) = -u(t) - \alpha x(t)$ et $x(t_0) = x_0$

$\mathrm{H}(u(t), x(t), \pi(t)) \equiv A^{1/\varepsilon}u(t)^{1-1/\varepsilon}$ - $(u(t) + \alpha x(t))$

4) Quelles sont les conditions nécessaires d'optimalité ?

On applique le PMP

$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u(t)} = 0$, quel que soit t soit $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)A^{1/\varepsilon}u(t)^{-1/\varepsilon} = \pi(t)$

$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x(t)} + \dot{\pi}(\ ) = 0$, quel que soit t soit $\frac{\dot{\pi}(t)}{\pi(t)} = \alpha > 0$ d'où $\pi(t) = \pi(t_0)e^{\alpha(t-t_0)}$

$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \pi(t)} = \dot{x}(t)$

Supposer que le stock est épuisé en T revient à imposer la condition de transversalité $\pi(T) > 0$, ce qui est cohérent avec la condition de l'optimum dynamique selon laquelle le multiplicateur est une fonction exponentielle du temps

5) En déduire le contrôle optimal en fonction du temps et des autres paramètres du modèle. Montrer que sur le sentier optimal $\varepsilon > 1$. Montrer que le prix du marché doit croître au taux α.

$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -\alpha\varepsilon < 0$ d'où en utilisant la condition de l'optimum statique : $\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \alpha$. Il vient :

$u(t) = u(t_0)e^{-\alpha\varepsilon(t-t_0)}$ il faut déterminer $u(t_0)$ en utilisant les conditions initiales et terminales

Comme le multiplicateur est positif il vient que $1 - \frac{1}{\varepsilon} > 0$: le pouvoir de marché du monopoleur doit être suffisamment élevé

6) Calculer la valeur initiale du prélèvement

Il faut utiliser la dynamique du stock dans laquelle on substitue l'évolution optimale du prélèvement :

$$\dot{x}(t) = -u(t_0)e^{-\alpha\varepsilon(t-t_0)} - \alpha x(t)$$

Il faut ensuite résoudre cette équation différentielle linéaire du premier ordre (*cf.* Section 1. I. à partir de la page 2). La solution générale, compte tenu de la condition initiale, est la suivante :

$x(t)e^{\alpha(t-t_0)} = x_0 - u(t_0)\int_{t_0}^{t} e^{\alpha(1-\varepsilon)(\tau-t_0)}d\tau$ soit $x(t)e^{\alpha(t-t_0)} = x_0 - u(t_0)\frac{1}{\alpha(1-\varepsilon)}\left[e^{\alpha(1-\varepsilon)(\tau-t_0)}\right]_{t_0}^{t}$ quel que t de l'horizon temporel

En utilisant la condition terminale $x(T) = 0$, il vient : $u(t_0) = \frac{x_0\alpha(\varepsilon-1)}{1-e^{\alpha(1-\varepsilon)(T-t_0)}}$ qui est positive puisque l'élasticité est supérieure strictement à l'unité.

Ce résultat étant établi on peut prolonger l'analyse en :

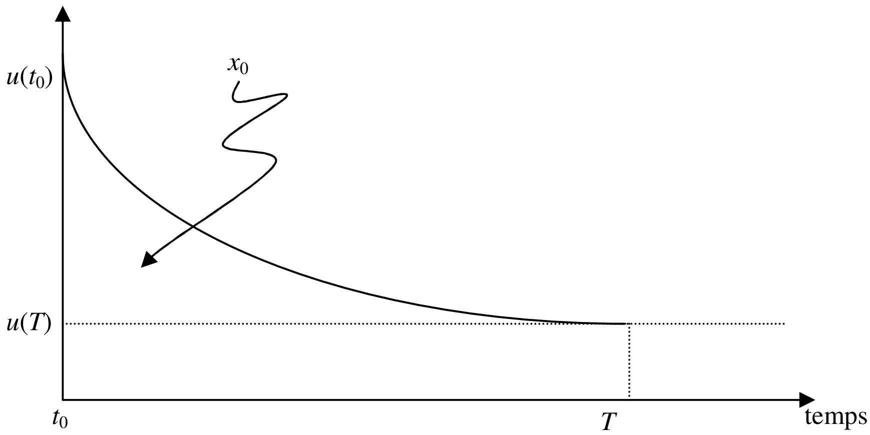
Etudiant l'impact des paramètres sur le prélèvement initial et notamment montrer que l'allongement de la durée d'exploitation entraîne un moindre prélèvement initial ;

Déduisant la valeur initiale du multiplicateur, c'est-à-dire du prix implicite initial du multiplicateur, en utilisant la condition de l'optimum statique :

$$\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)A^{1/\varepsilon}u(t_0)^{1-1/\varepsilon}=\pi(t_0) \text{ d'où } \pi(t_0)=\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)A^{1/\varepsilon}\left(\frac{x_0\alpha(\varepsilon-1)}{1-e^{\alpha(1-\varepsilon)(T-t_0)}}\right)^{1-1/\varepsilon}$$

Faisant une représentation graphique de l'évolution du prélèvement au cours du temps :

Figure 3. Evolution du prélèvement optimal au cours du temps



La surface comprise entre le graphe de $u(t)$ et l'asymptote $u(t) = u(T)$ correspond au stock initial x_0. On peut établir que $u(T)$ est inférieur à $u(t_0)$ en utilisant l'expression décrivant l'évolution de $u(t)$:

$$u(T)=\frac{x_0\alpha(\varepsilon-1)}{1-e^{\alpha(1-\varepsilon)(T-t_0)}}e^{-\alpha\varepsilon(T-t_0)}$$

En particulier, quand T devient très grand (sans devenir infini) :

$$u(t_0)\cong x_0\alpha(\varepsilon-1) \text{ et } u(T)\cong 0^+$$

V. EXPLOITATION D'UNE RESSOURCE NATURELLE EPUISABLE EN CONCURRENCE ET EN MONOPOLE

Le problème de contrôle optimal est le suivant :[12]

[12] Un problème plus général introduisant des effets de stocks dans la fonction de recette et de coût est proposé par Krautkraemer, J. 1998.

Encadré 3. La gestion optimale d'une ressource non renouvelable formulée comme un problème de contrôle optimal

$$\max_{x(t)} U = \int_0^T \left(u(x(t)) - C(x(t))\right)e^{-rt}dt \quad (37)$$

Sous la contrainte dynamique $\dot{s}(t) = -x(t)$ (38)

Et la condition initiale : $s(0) = s_0$ (39)

$u(.)$ est la recette totale de l'exploitation de la ressource. Elle dépend des prix et des quantités prélevées et de l'hypothèse de fonctionnement du marché de la ressource (2 cas seront évoqués, la concurrence et le monopole) ;

$C(.)$ est le coût total d'exploitation supposé dépendre des quantités extraites. D'autres hypothèses peuvent être faites, notamment pour tenir compte de la qualité de la ressource, sa facilité d'extraction, etc. Dans ce cas, le coût peut également dépendre des réserves de la ressource.

La condition (38) est aussi appelée condition d'épuisabilité qui est parfois formulée différemment. L'équation suivante en est est la primitive :

$$s(t) = s_0 - \int_0^t x(\tau)d\tau$$

Il s'agit bien d'une contrainte (physique) qui stipule que le stock en t est le stock initial dont on déduit tout ce qui a été prélevé auparavant entre 0 et t.

A. La résolution du problème

On définit la fonction de Hamilton et les multiplicateurs dynamiques $\pi(t)$ associés au problème :

$$\mathrm{H}(x(t)\ s(t)\ \pi(t)\ t) \equiv u(x(t)).e^{-rt} - \pi(t).x(t) \quad (40)$$

$u(.)$ est le profit instantané en valeur courante qui peut être défini en fonction des hypothèses sur le fonctionnement des marchés :

1) Hypothèse d'un prix de la RNE constant : $u \equiv px(t) - C(x(t))$;
2) Hypothèse d'un propriétaire exploitant en situation de concurrence pure et parfaite : $u \equiv p(t)x(t) - C(x(t))$;
3) Hypothèse d'un monopole : $u \equiv p(x(t))x(t) - C(x(t))$

On peut raisonner en valeurs courantes. On définit donc la fonction de Hamilton et un multiplicateur dynamique en valeurs courantes. Soit $\lambda(t)e^{-rt} = \pi(t)$ on définit la fonction de Hamilton en valeur courante :

$$\tilde{\mathrm{H}}(x(t), s(t), \lambda(t)) \equiv u(x(t)) - \lambda(t)x(t)$$

Les conditions (nécessaires) d'un prélèvement optimal *i.e.* qui maximise le profit inter-temporel sont le Principe du Maximum de Pontryagine.

1. Les conditions nécessaires d'optimalité

Les conditions (nécessaires) pour que les triplets ($x(t)$ $s(t)$ $\lambda(t)$) déterminent une trajectoire optimale sont les suivantes :

$\dfrac{\partial \tilde{\mathrm{H}}}{\partial x(t)} = 0$; $\dfrac{\partial \tilde{\mathrm{H}}}{\partial s(t)} + \dot{\lambda}(t) - r\lambda(t) = 0$ ou $\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial s(t)} + \dot{\pi}(t) = 0$ et $\lambda(t)$ non nul au moins en un point de l'horizon temporel ; de plus on vérifie $\dfrac{\partial \tilde{\mathrm{H}}}{\partial \lambda(t)} = \dot{s}(t)$ quel que soit t avec $s(0) = s_0$

On développe ces trois conditions (on omet les indices du temps) :

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{H}}}{\partial x(t)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x(t)} - \frac{\partial C}{\partial x(t)} = \lambda(t) \text{ et } x(t) > 0 \text{ ; } \forall\, t \tag{41}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{H}}}{\partial s(t)} + \dot{\lambda}(t) - r\lambda(t) = 0 \Leftrightarrow r\lambda(t) = \dot{\lambda}(t) \text{ ; } \forall\, t \tag{42}$$

ou bien :

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s(t)} + \dot{\pi}(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\pi}(t) = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{H}}}{\partial \lambda(t)} = \dot{s}(t) \Leftrightarrow \dot{s}(t) = -x(t) \tag{43}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x(t)}$ représente la recette marginale et $\dfrac{\partial C}{\partial x(t)}$ le coût marginal. Dans le cas général, en rapprochant les équations (41) et (17) on trouve la règle de Hotelling qui stipule que la recette marginale nette du coût marginal augmente au taux r.

2. Les conditions de transversalité

Il faut également définir les conditions de transversalité qui définissent ce qui se passe à la fin de la période d'exploitation de la ressource. Plusieurs possibilités :

1) Le stock en T de la ressource est nul :

La durée de l'exploitation de la RNE est supposée connue *a priori* car est un paramètre du modèle. Dans ce cas la valeur terminale du multiplicateur dynamique est libre. La valeur (présente) implicite du stock terminal de la ressource est nulle à la fin de l'horizon temporel :

$$\lambda(T).e^{-rT}\, s(T) = 0 \tag{44a}$$

Comme le prix implicite en valeur courante augmente au taux r et est différent de zéro, il vient que le stock de la ressource est épuisé en T :

$s(T) = 0$

2) La durée de l'exploitation T^* de la ressource est choisie par l'exploitant.

Dans ce cas il faut rajouter aux conditions nécessaires la condition suivante :

$$\tilde{\mathrm{H}}\left(x\left(T^*\right), s\left(T^*\right), \lambda\left(T^*\right)\right) \equiv u\left(x\left(T^*\right)\right) - C\left(x\left(T^*\right)\right) - \lambda\left(T^*\right)x\left(T^*\right) = 0 \text{ ou bien}$$
$$\mathrm{H}\left(x\left(T^*\right), s\left(T^*\right), \pi\left(T^*\right), T^*\right) \equiv \left(u\left(x\left(T^*\right)\right) - C\left(x\left(T^*\right)\right)\right)e^{-rT^*} - \pi\left(T^*\right)x\left(T^*\right) = 0 \tag{44b}$$

Dans l'hypothèse de concurrence et dans le cas particulier où le coût total est une fonction linéaire du prélèvement[13], on obtient *:*

$(p(T) - c)x(T) - \lambda(T)x(T) = 0$ ce qui donne 2 possibilités :
$x(T) = 0$ ou $x(T) \neq 0$ et $p(T) - c = \lambda(T)$ ce qui est la condition de l'optimum instantané.

Dans l'hypothèse de concurrence et dans le cas d'un coût marginal croissant et convexe par rapport aux quantités prélevées, on obtient :

$$\lambda(T) = p(T) - \frac{C(x(T))}{x(T)}$$

En rapprochant cette condition de la condition de l'optimum instantané (41) évaluée en T il vient que le coût marginal est égal au coût moyen d'extraction en T :

[13] Dans ce cas, le coût marginal est égal au coût moyen et est constant.

$$\frac{\partial C(x(T))}{\partial x} = \frac{C(x(T))}{x(T)}$$

B. Simulation de l'évolution du prélèvement et des prix

1. Concurrence pure et parfaite

Dans l'hypothèse où le coût marginal est constant et égal au coût moyen, les conditions d'optimalité (41) et (17) deviennent :

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x(t)} = 0 \Leftrightarrow p(t) - c = \lambda(t) \text{ et } x(t) > 0 \text{ ; } \forall t \tag{45}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s(t)} + \dot{\lambda}(t) - r\lambda(t) = 0 \Leftrightarrow r\lambda(t) = \dot{\lambda}(t) \text{ soit } rp(t) = \dot{p}(t) \text{ ; } \forall t \tag{46}$$

En outre nous supposons que la durée de l'exploitation est endogène (condition de transversalité 44b). Cela permettra de comparer la durée d'exploitation avec celle d'un exploitant en situation de monopole. Dans l'hypothèse d'une fonction de demande inverse $p(t) = a - bx(t)$, les résultats sont les suivants :

$$x(t) = \frac{a-c}{b}\left(1 - e^{r(t-T)}\right) \text{ ; } p(t) = c + (a-c)\left(1 - e^{r(t-T)}\right) \text{ ; } T - \frac{1}{r}\left(1 - e^{-rT}\right) - \frac{bs_0}{a-c} = 0$$

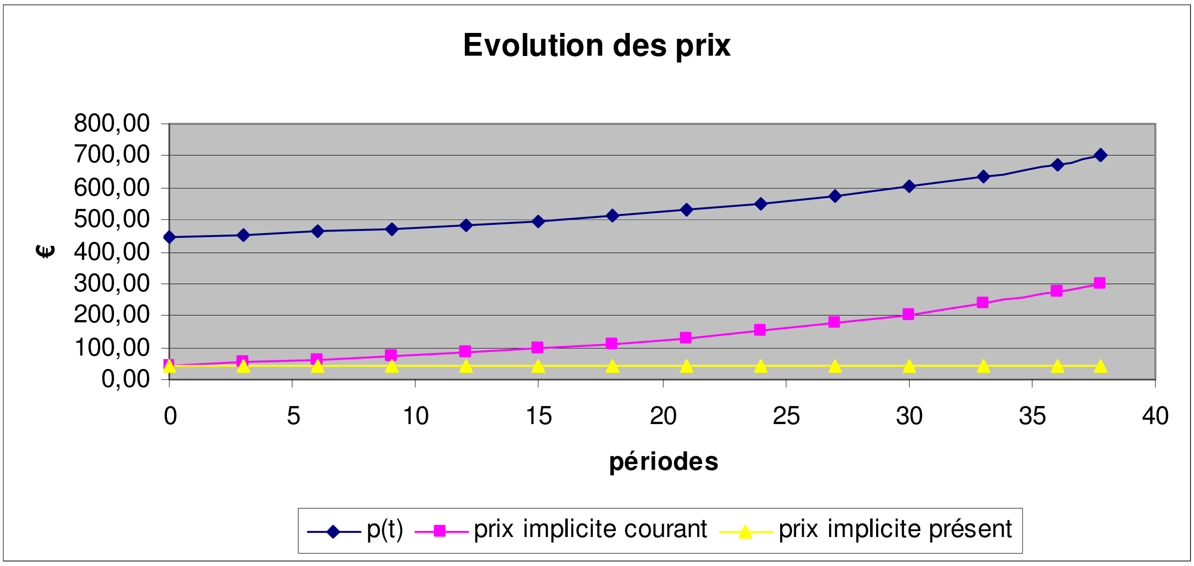
La durée T est non linéaire par rapport aux paramètres. Elle peut être calculée de manière numérique. Une application numérique peut être faite dont les résultats sont présentés dans le Tableau 5 ci-dessous :

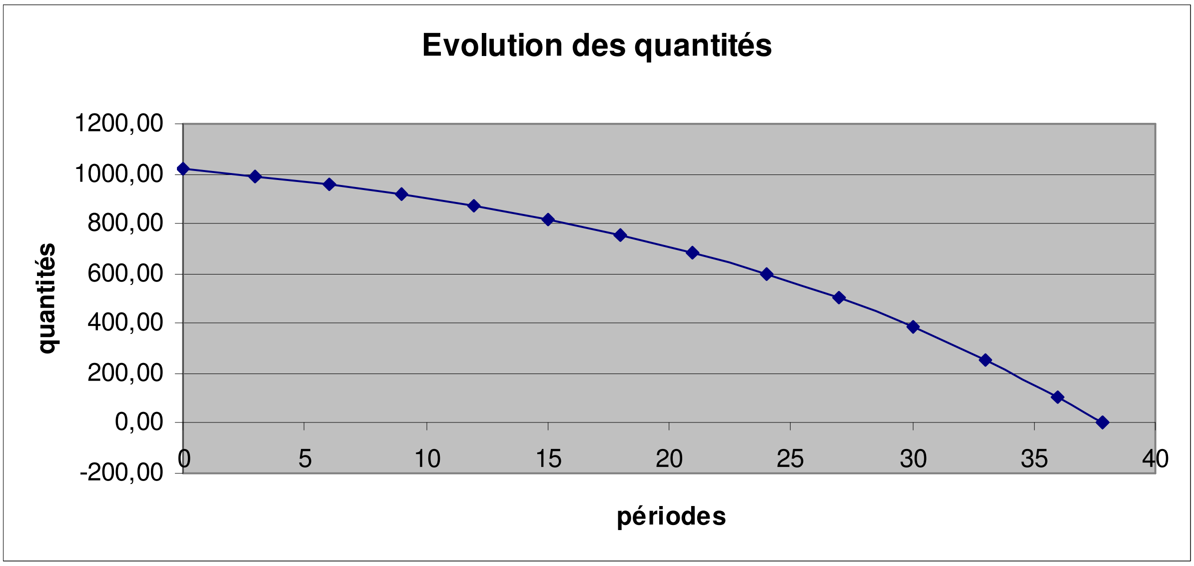
Tableau 5. Evolution des prix et des quantités prélevées dans l'hypothèse de concurrence et d'une demande linéaire par rapport au prix

période	$x(t)$	$p(t)$	λ(t)	π(t)
0,00	1018,84	445,29	45,29	45,29
3,00	989,52	452,62	52,62	45,29
6,00	955,46	461,13	61,13	45,29
9,00	915,89	471,03	71,03	45,29
12,00	869,91	482,52	82,52	45,29
15,00	816,49	495,88	95,88	45,29
18,00	754,42	511,39	111,39	45,29
21,00	682,31	529,42	129,42	45,29
24,00	598,53	550,37	150,37	45,29
27,00	501,19	574,70	174,70	45,29
30,00	388,10	602,97	202,97	45,29
33,00	256,71	635,82	235,82	45,29
36,00	104,05	673,99	273,99	45,29
37,81	0,00	700,00	300,00	45,29

La durée T est approximativement 37,8 ; $s_0 = 25000$; $a = 700$; $b = 0{,}25$; $r = 5\%$

Figure 4. Evolution des prix et des quantités en concurrence





2. Le monopole

Dans l'hypothèse où le coût marginal est constant et égal au coût moyen, les conditions d'optimalité (41) et (17) deviennent :

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x(t)} = 0 \Leftrightarrow Rm(t) = \lambda(t) \text{ et } x(t) > 0 \text{ ; } \forall\, t \tag{47}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s(t)} + \dot{\lambda}(t) - r\lambda(t) = 0 \Leftrightarrow r\lambda(t) = \dot{\lambda}(t) \text{ soit } rp(t) = \dot{p}(t) \text{ ; } \forall\, t \tag{48}$$

La durée de l'exploitation est endogène (condition de transversalité 44b). La fonction de demande inverse se confond avec la recette moyenne, notée $RM(t)$ de l'exploitant de la ressource dans l'hypothèse d'un monopole. On peut donc en déduire les fonctions représentant la recette totale, notée $RT(t)$ et la recette marginale, notée $Rm(t)$. Dans l'hypothèse d'une fonction de demande inverse $p(t) = a - bx(t)$, les résultats sont les suivants :

$$RT(t) \equiv x(t)RM(t) \text{ soit } RT(t) \equiv ax(t) - bx(t)^2 \text{ d'où } Rm(t) \equiv a - 2bx(t)$$

Les principaux résultats sont les suivants :

$$x(t) = \frac{a-c}{2b}\left(1 - e^{r(t-T)}\right) \text{ ; } p(t) = \frac{a-c}{2}\left(1 - e^{r(t-T)}\right) \text{ ; } T - \frac{1}{r}\left(1 - e^{-rT}\right) - \frac{2bs_0}{a-c} = 0$$

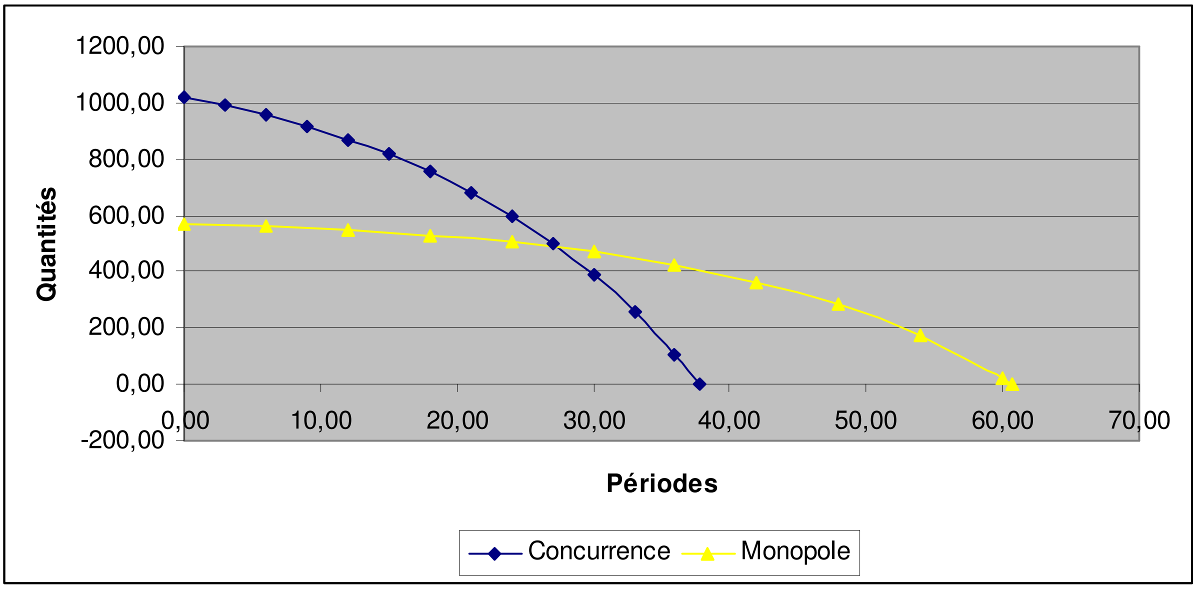
Comme dans l'hypothèse de CPP, la durée T est non linéaire par rapport aux paramètres. Mais on voit immédiatement qu'elle est plus importante dans le cas du monopole.

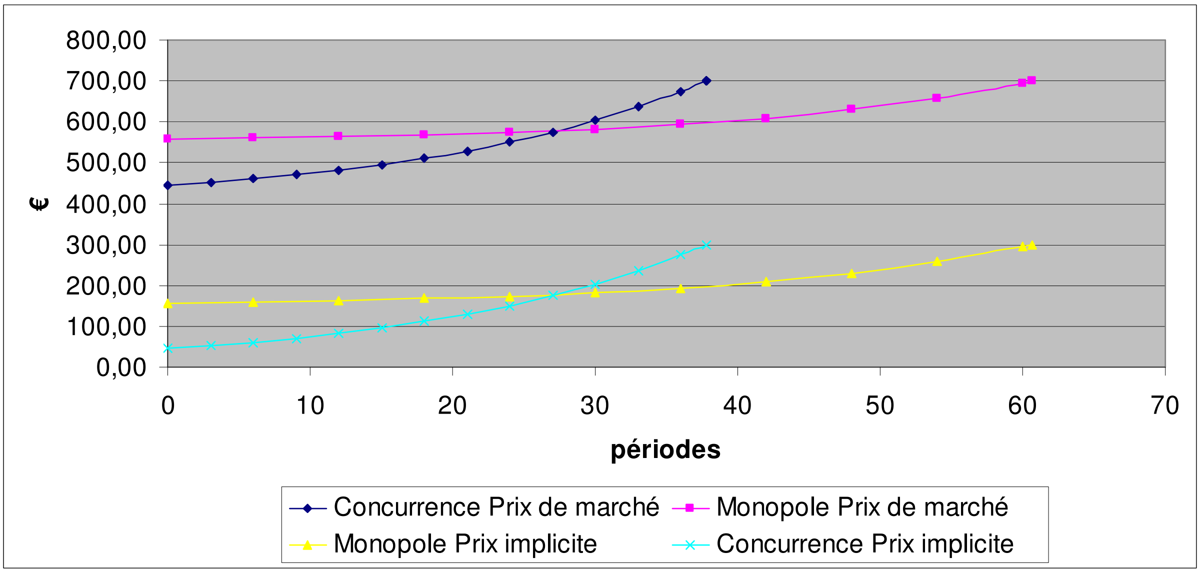
Tableau 6. Evolution des prix et des quantités prélevées dans l'hypothèse d'un monopole et d'une demande linéaire par rapport au prix

période	$x(t)$	$p(t)$	$\lambda(t)$	$\pi(t)$
0	571,16	557,21	157,21	157,21
6,00	561,07	559,73	159,73	118,33
12,00	547,46	563,14	163,14	89,53
18,00	529,07	567,73	167,73	68,19
24,00	504,26	573,94	173,94	52,39
30,00	470,76	582,31	182,31	40,68
36,00	425,55	593,61	193,61	32,00
42,00	364,51	608,87	208,87	25,58
48,00	282,13	629,47	229,47	20,82
54,00	170,91	657,27	257,27	17,29
60,00	20,79	694,80	294,80	14,68
60,71	0,00	700,00	300,00	14,42

La durée T est approximativement 60,71 ; $s_0 = 25000$; $a = 700$; $b = 0,25$; $r = 5\%$

Figure 5. Evolution des prix et des quantités dans l'hypothèse d'un monopole





Section 4. La représentation des solutions

Le PMP permet de déterminer simultanément l'évolution de la variable de contrôle $c(t)$ et de la variable d'état $s(t)$. En effet, les équations canoniques (17) et (18) de Hamilton donnent le système constitué de la dynamique de la variable d'état et du multiplicateur dynamique :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = f(c(t), s(t), t) \\ \dot{\pi}(t) = -\left(\dfrac{\partial u}{\partial s} + \pi \dfrac{\partial f}{\partial s}\right) \end{cases} \tag{49}$$

Ce système peut être également considéré comme décrivant l'évolution de la variable de contrôle et d'état si l'on tient compte de la condition (16) dans la condition (18). En effet, la condition (16) permet d'établir une relation entre c et de π. Le système (49) peut donc être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{s}(\pi(t), s(t), t) = f(\pi(t), s(t), t) \\ \dot{\pi}(\pi(t), s(t), t) = -\left(\dfrac{\partial u}{\partial s} + \pi \dfrac{\partial f}{\partial s}\right) \equiv g(\pi(t), s(t), t) \end{cases} \tag{50}$$

Ce système est rarement résolu analytiquement. En effet, si l'on disposait de toutes les formes fonctionnelles et de tous les paramètres on pourrait utiliser des méthodes numériques pour obtenir une solution. Or, en économie le problème n'est pas tant d'obtenir les solutions elles-mêmes mais leurs propriétés et l'on ne connaît que certaines propriétés des formes fonctionnelles (fonctions d'utilité croissantes et concaves, fonctions de production Cobb Douglas, etc.). En bref, en économie on établit rarement les solutions explicites du système (50). Celui-ci permet de confirmer que le long d'une trajectoire optimale π et s (ou c et s) sont choisies simultanément.

Pour étudier la trajectoire optimale on peut procéder de 2 façons qui sont complémentaires[14] et reposent sur la linéarisation proximité de l'équilibre dynamique (c^*, s^*)

[14] La représentation sous la forme de diagramme de phase n'est envisageable que si l'évolution du multiplicateur ou de la variable de contrôle n'est pas une fonction monotone du temps.

ou (π*, s*) avec c* (ou π*) et s* solutions non triviales c'est-à-dire différentes de 0 qui vérifient :[15]

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = 0 \\ \dot{\pi}(t) = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} f(c(t), s(t), t) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial s} + \pi \dfrac{\partial f}{\partial s} \right) = 0 \end{cases}$$

La première consiste à étudier les propriétés des solutions (c*, s*) : paragraphe I. .

On peut cependant préférer une seconde approche qui consiste à réaliser, le cas échéant, un diagramme de phases *cf.* paragraphe II. page 49 qui permet une représentation graphique de la trajectoire. Il consiste à faire une partition d'un plan dont les axes représentent la variable de contrôle (ou le multiplicateur) et la variable d'état, suivant le sens dans lequel elles évoluent.

I. ETUDE DU SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 1

A. *Cas général*

Les systèmes d'équations différentielles comportant deux équations se prêtent encore assez aisément à des études qualitatives reposant sur la technique du diagramme des phases et de la linéarisation au voisinage de l'équilibre. La trame du raisonnement est la même que précédemment ; la notion de stabilité de l'équilibre est cependant plus « raffinée ». On considère le système autonome suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \text{ soit } \begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{51}$$

Les fonctions g_1 et g_2 continues et dérivables deux fois au moins. On suppose également que le système (51) possède un équilibre (x_1*, x_2*) de sorte que :

$g_1(x_1^*, x_2^*) = 0$ et $g_2(x_1^*, x_2^*) = 0$

[15] Dans l'exemple précédent de la vente d'une denrée périssable Section 3. paragraphe IV. Page 35), l'équation différentielle gouvernant l'évolution du multiplicateur et donc du contrôle optimal n'a pas de solution puisque le taux de variation est une constante non nulle.

A proximité de l'équilibre le système (51) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1\big|_{x_1 = x_1^*} \cong g_1\left(x_1^*, x_2^*\right) + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right)\cdot\left(x_1 - x_1^*\right) + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right)\cdot\left(x_2 - x_2^*\right) \\ \dot{x}_2\big|_{x_2 = x_2^*} \cong g_2\left(x_1^*, x_2^*\right) + \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right)\cdot\left(x_1 - x_1^*\right) + \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right)\cdot\left(x_2 - x_2^*\right) \end{cases} \qquad \textbf{(52)}$$

En tenant compte des propriétés de l'équilibre le système peut être écrit en utilisant la matrice jacobienne correspondante dont on suppose que le déterminant est non nul :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right) & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right) & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{pmatrix}$$

On peut, comme dans le cas d'une équation simple, procéder à un changement de variables $z_i = x_i - x_i^*$, $i = 1, 2$:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right) & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right) & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad (53)$$

Cela qui revient à étudier un système d'équations différentielles linéaires. Comme dans le cas d'une équation simple, les solutions seront de la forme exponentielle $e^{\lambda . t}$ où λ sont les valeurs propres du jacobien. Les propriétés de l'équilibre dépendront du comportement de la trace *tr* et du déterminant *dét* du jacobien. L'équation caractéristique du système est la suivante :

$$\lambda^2 - tr\,.\lambda + dét = 0$$

où

$$tr = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \text{ et } dét = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

Les racines, supposées non toutes nulles, ont la forme générale :

$$\lambda = \frac{tr \mp \sqrt{tr^2 - 4 \cdot dét}}{2}$$

Elles sont notées λ_1 et λ_2 . Remarque :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{tr + \sqrt{tr^2 - 4 \cdot dét}}{2} + \frac{tr - \sqrt{tr^2 - 4 \cdot dét}}{2} = tr \ ;$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{tr + \sqrt{tr^2 - 4 \cdot dét}}{2} \cdot \frac{tr - \sqrt{tr^2 - 4 \cdot dét}}{2} = \frac{tr^2 - tr^2 + 4 \cdot dét}{4} = dét$$

Si en outre le déterminant est négatif et la trace positive, nous avons deux racines réelles de signes opposés, de valeurs absolues différentes. Le point d'équilibre est appelé point-selle (ou col). Ce type d'équilibre en économie est intéressant dans la mesure où il peut être interprété en terme de convergence économique dans la mesure où une seule trajectoire conduit au point-selle. C'est par exemple le cas dans le modèle de croissance optimale de Cass, D. 1965, *cf.* Lacaze, D. 1990 par exemple).

B. Exemple : Brander & Taylor 1998

Cet article présente un modèle d'équilibre général associant ressources renouvelables et dynamique des populations inspiré du modèle proie-prédateur de Lotka et Volterra où l'homme est le prédateur et les ressources sont la proie. Ce modèle est utilisé pour décrire l'évolution de l'île de Pâques où des valeurs plausibles des paramètres permettent de simuler l'abondance puis la famine. L'évolution de l'économie est décrite par deux équations :

$$\dot{S}(t) = rS(t)\left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \alpha\beta L(t)S(t) \text{ et } \dot{L}(t) = L(t)(b - d + \phi\alpha\beta S(t))$$

La première équation différentielle est inspirée du modèle bio-économique de Gordon-Schaefer qui décrit l'évolution de la taille S d'une RNR en fonction de 2 paramètres : r est le taux de croissance intrinsèque et K la capacité de charge. Le prélèvement est une fonction de l'effort de prélèvement, proportionnel à la taille de la population $L(t)$ et le stock de la ressource $S(t)$;

La seconde équation décrit l'évolution de la taille de la population qui dépend du taux de natalité b et de mortalité d ; b-d est supposé négatif ce qui signifie que sans RNR, la population humaine disparaît. La consommation de la ressource accroît la fertilité ou diminue la mortalité et donc accroît le taux de croissance de la population. La fertilité dépend positivement du niveau de la consommation (prélèvement) de la ressource par tête : c'est en ce sens que la dynamique de la population est malthusienne. La consommation de la RNR par tête dépend linéairement du stock de la ressource : $\phi\alpha\beta S(t)$ où ϕ est une constante positive.

Dans l'hypothèse où il existe un état régulier, la matrice jacobienne correspondant à ce système d'équations différentielles est :

$$\begin{cases} \dot{S}\big|_{S=S^*} \cong r\left(1-\dfrac{2S^*}{K}\right)(S-S^*)-\alpha\beta S^*(L-L^*) \\ \dot{L}\big|_{L=L^*} \cong L^*\alpha\beta(S-S^*)+(b-d+\phi\alpha\beta S^*)(L-L^*) \end{cases} \text{ d'où}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{L} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} r\left(1-\dfrac{2S^*}{K}\right) & -\alpha\beta S^* \\ L^*\alpha\beta & (b-d+\phi\alpha\beta S^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S-S^* \\ L-L^* \end{pmatrix}$$

La trace et le déterminant sont :

$$tr = r\left(1-\frac{2S^*}{K}\right)+(b-d+\phi\alpha\beta S^*) \text{ et } dét = r\left(1-\frac{2S^*}{K}\right)(b-d+\phi\alpha\beta S^*)+\alpha^2\beta^2 L^* S^*$$

II. LE DIAGRAMME DE PHASES

A. *Premier exemple : arbitrage consommation épargne*

Pour illustrer cette technique, on prend le problème de contrôle optimal suivant:. L'objectif des agents économiques est de maximiser leur utilité inter-temporelle U définie de la façon suivante en choisissant $c(t)$, leur consommation, en tout point de leur horizon temporel $[0\,;T]$:

Définition 5. L'arbitrage entre consommation présente et future, formulé sous la forme d'un problème de contrôle optimal

$\max_{c(t)} U = \int_0^T \ln(c(t))e^{-\rho\cdot t}dt$; $\rho = 0{,}05$

Sous la contrainte dynamique qui donne l'évolution de leur richesse :

$\dot{w}(t) = f(c(t), w(t)) = 2w(t)^{0,5} - c(t)$;

La condition initiale donne la valeur initiale de la richesse :

$w(0) = w_0$

On peut étudier 2 conditions terminales :

$w(T) = w_T$ ou libre

La fonction de Hamilton du problème autonome est la suivante :

$$\tilde{H}(c,w,\lambda) = \ln c(t) + \lambda(t)\left(2w(t)^{0,5} - c(t)\right)$$

avec :

$\tilde{H}$ la fonction de Hamilton en valeur courante ;

λ le multiplicateur dynamique en valeur courante.

Les équations canoniques de Hamilton qui découlent de ce problème sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{w}(w,\lambda) = 2w(t)^{0,5} - \lambda(t)^{-1} \\ \dot{\lambda}(w,\lambda) = \lambda(t)\left(\rho - w(t)^{-0,5}\right) \end{cases}$$

La représentation graphique de l'évolution simultanée du multiplicateur et de la variable d'état se fait en trois étapes :

D'abord on étudie le comportement de l'équation $\dot{\lambda}(w,\lambda) = 0$ soit $\lambda(t)\left(\rho - w(t)^{-0,5}\right) = 0$;

Ensuite on étudie le comportement de l'équation $\dot{w}(w,\lambda) = 0$ soit $2w(t)^{0,5} - \lambda(t)^{-1} = 0$;

Enfin on rapproche les 2.

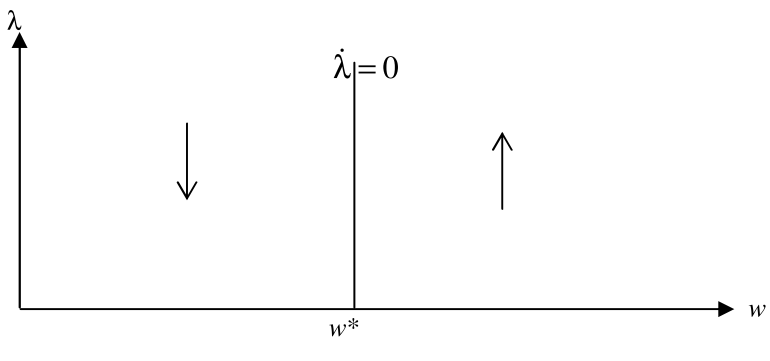
1. **Evolution du multiplicateur dynamique**

Etude du lieu $\dot{\lambda}(w,\lambda) = 0$. Une valeur de λ différente de zéro vérifiant l'équation précédente entraîne *w* constant noté $w^* = \rho^{-2}$ soit $w^* = 0{,}05^{-2} = 400$. Pour faire le diagramme de phases dans le plan (w, λ) il faut établir la pente du lieu $\dot{\lambda}(w,\lambda) = 0$:

$$\left.\frac{d\lambda}{dw}\right|_{\dot{\lambda}=0} = -\frac{\partial\dot{\lambda}(w,\lambda)/\partial w}{\partial\dot{\lambda}(w,\lambda)/\partial\lambda} \text{ soit } \left.\frac{d\lambda}{dw}\right|_{\dot{\lambda}=0} = -\frac{0{,}5\cdot\lambda\cdot w^{-1,5}}{0} = \infty$$

De plus pour $w < w^*$ on obtient $-w^{-0,5} < -w^{*-0,5}$ donc $\dot{\lambda} < 0$ ce qui permet de représenter les lignes de phases :

Figure 6. Evolution du multiplicateur dynamique



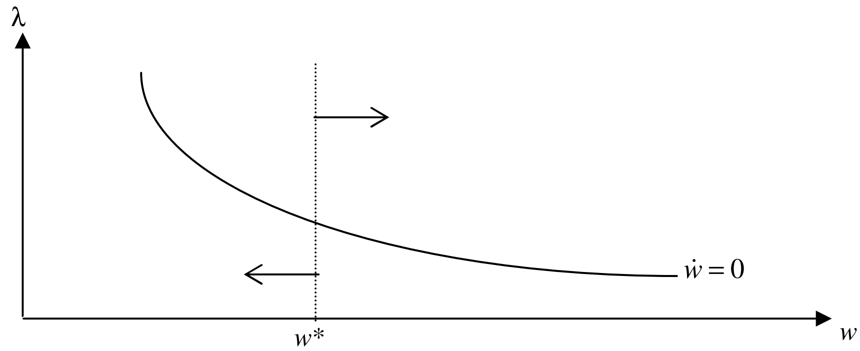
2. **Evolution de la variable d'état sur le diagramme de phase**

Etude du lieu $\dot{w}(w,\lambda) = 0$. Pour faire le diagramme de phases dans le plan (w, λ) il faut établir la pente du lieu $\dot{w}(w,\lambda) = 0$:

$$\left.\frac{d\lambda}{dw}\right|_{\dot{w}=0} = -\frac{\partial\dot{w}(w,\lambda)/\partial w}{\partial\dot{w}(w,\lambda)/\partial\lambda} \text{ soit } \left.\frac{d\lambda}{dw}\right|_{\dot{w}=0} = -\frac{w^{-0,5}}{\lambda^{-2}} < 0$$

De plus $\dfrac{\partial\dot{w}(w,\lambda)}{\partial\lambda} > 0$ ce qui permet de tracer les lignes de phases :

Figure 7. Représentation de l'évolution de la variable d'état sur un diagramme de phase



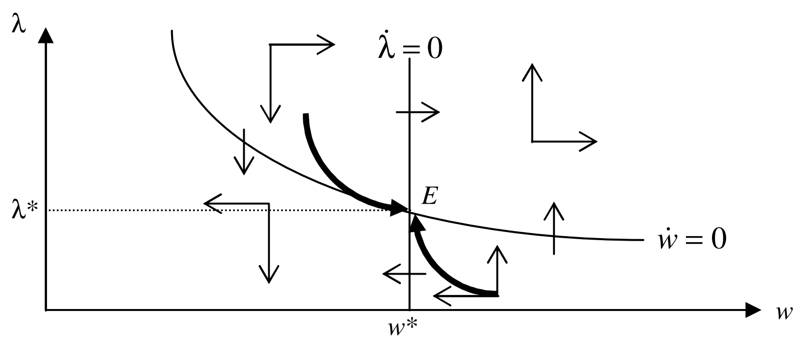
On peut étudier différemment le lieu $\dot{w}(w,\lambda)=0$ puisqu'ici on peut établir la relation explicite entre λ et w d'après $\dot{w}(w,\lambda)=2\cdot w(t)^{0,5}-\lambda(t)^{-1}=0 \Leftrightarrow 2\cdot w(t)^{0,5}=\lambda(t)^{-1}$ d'où $\lambda(t)=0,5\cdot w(t)^{-0,5}$ dont on peut étudier la pente :

$\dfrac{d\lambda}{dw}=-0,25\cdot w(t)^{-1,5}<0$ et $\dfrac{d^2\lambda}{dw^2}>0$: il s'agit donc d'une fonction décroissante et convexe par rapport à l'origine.

3. Etude de l'évolution simultanée du multiplicateur et de la variable d'état

Le diagramme de phases complet est le suivant :

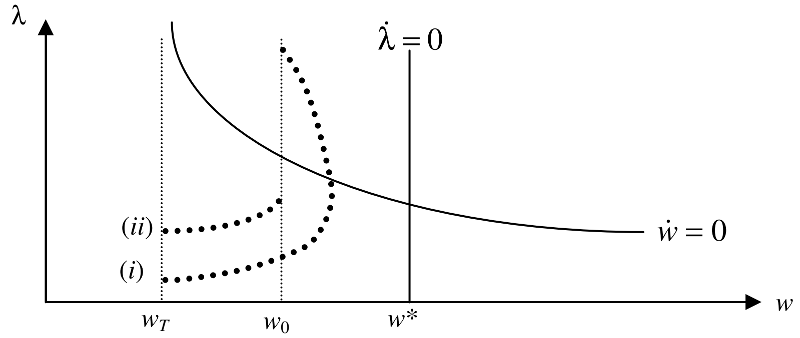
Figure 8. Représentation de l'évolution simultanée du multiplicateur et de la variable d'état



Pour $w^* = \rho^{-2} = 400$, $\lambda^* = 0,5\rho = 0,025$; $\rho = 5\%$

Si l'horizon était infini, alors à long terme, l'économie se dirige en *E*. Si l'horizon est fini, on peut imposer d'autres conditions de transversalité : ou bien $s(T)$ est fixé de manière exogène (s_T) ou bien est libre.

Figure 9. Représentation de l'évolution simultanée du multiplicateur et de la variable d'état compte tenu des conditions initiales et de transversalité



2 possibilités. Si l'utilité marginale est faible en début de période, la trajectoire démarre dans le quadrant nord-ouest du schéma puis passe dans le quadrant sud ouest (*i*). Si l'utilité marginale est forte, la trajectoire démarre dans le quadrant sud ouest et suit une même trajectoire. Si on laisse $w(T)$ libre, cela signifie que quelle que soit la valeur de la richesse terminale, l'effet marginal de celle-ci en terme de bien-être inter-temporel est nul *i.e.* le multiplicateur correspondant est nul, ce qui amène la trajectoire jusqu'à l'intersection avec l'axe des abscisses.

4. Vitesse de convergence quand *T* tend vers l'infini

On peut établir la vitesse de convergence quand l'horizon tend vers l'infini. Pour cela, il suffit de linéariser le système d'équations différentielles formées par les équations canoniques de Hamilton à proximité de l'état régulier *E* de coordonnées (w^*, λ^*) :

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5w^{*-1{,}5} \\ \dfrac{1}{\lambda^{*2}} & w^{*-0{,}5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda - \lambda^* \\ w - w^* \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} \dot{\lambda} \cong 0{,}5w^{*-1{,}5}\left(w - w^*\right) \\ \dot{w} \cong \dfrac{1}{\lambda^{*2}}\left(\lambda - \lambda^*\right) + w^{*-0{,}5}\left(w - w^*\right) \end{cases}$$

Rappel : $w^* = \rho^{-2}$, $\lambda^* = 0{,}5\rho$; il vient :

$$tr = w^{*-0{,}5} = \rho \text{ et } dét = -\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^{*2}}w^{*-1{,}5} = -0{,}5\frac{1}{(0{,}5)^2\rho^2}\rho^3 = -2\rho$$

Il faut déterminer les solutions du système d'équations différentielles ci-dessus. Comme l'évolution de λ ne dépend que de sa proximité avec l'état régulier, on peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 2 en w :

$\ddot{w} \cong \frac{1}{\lambda^{*2}}\dot{\lambda} + \frac{1}{w^{*0,5}}\dot{w}$ en remplaçant $\dot{\lambda}$ par son expression :

$\ddot{w} - \frac{1}{w^{*0,5}}\dot{w} - \frac{1}{\lambda^{*2}}\frac{1}{2}\frac{1}{w^{*1,5}}w = -\frac{1}{\lambda^{*2}}\frac{1}{2}\frac{1}{w^{*1,5}}w^{*}$ soit $\ddot{w} - \frac{1}{w^{*0,5}}\dot{w} - \frac{1}{\lambda^{*2}}\frac{1}{2}\frac{1}{w^{*1,5}}w = -\frac{1}{\lambda^{*2}}\frac{1}{2}\frac{1}{w^{*0,5}}$

Son équation caractéristique est :

$x^2 - \frac{1}{w^{*0,5}}x - \frac{1}{\lambda^{*2}}\frac{1}{2}\frac{1}{w^{*1,5}} = 0$ soit $x^2 - x\,tr + dét = 0$ où x sont les racines.

La trace de la matrice jacobienne est positive et le déterminant négatif : E est un point selle c'est dire qu'une seule trajectoire conduit les couples (w,λ) vérifiant le PMP vers l'état régulier. Les sont supposées non toutes nulles et ont la forme générale suivante :

$$x = \frac{tr \mp \sqrt{tr^2 - 4dét}}{2}$$

Elles sont notées x_1 et x_2. L'une est positive, l'autre est négative. La seconde correspond à des valeurs explosives des variables. La première permet d'obtenir l'expression de la vitesse de convergence :

$$x_1 = \frac{tr - \sqrt{tr^2 - 4dét}}{2} = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 8\rho}}{2} < 0 \text{ et } \frac{\partial x_1}{\partial \rho} = \frac{tr - \sqrt{tr^2 - 4dét}}{2} = \frac{1 - (\rho + 4)(\rho^2 + 8\rho)^{-0,5}}{2} < 0$$

Tableau 7. Valeur des paramètres d'intérêt

w_0	350	350	350	350	**350**	450	450	450	450	**450**
ρ	1%	2%	3%	4%	**5%**	1%	2%	3%	4%	**5%**
x	-14%	-19%	-23%	-26%	**-29%**	-14%	-19%	-23%	-26%	**-29%**
w^*	10000	2500	1111	625	**400**	10000	2500	1111	625	**400**
λ^*	0,005	0,01	0,015	0,02	**0,025**	0,005	0,01	0,015	0,02	**0,025**
$\lambda(0)$	0,04	0,05	0,05	0,04	**0,03257**	0,04	0,04	0,04	0,04	**0,01743**
c^*	200,00	100,00	66,67	50,00	**40,00**	200,00	100,00	66,67	50,00	**40,00**
$c(0)$	28,15	21,46	20,28	22,43	**30,70**	28,41	22,27	22,32	28,05	**57,37**

La vitesse de convergence (négative) diminue quand le taux de préférence pour le présent augmente. La consommation initiale diminue (augmente) avec le taux de préférence pour le présent quand la richesse initiale est inférieure (supérieure) à sa valeur de l'état régulier

L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 peut être résolue.

La solution de l'équation homogène est : $w(t) = \alpha_1 e^{x_1 t} + \alpha_2 e^{x_2 t}$ où α_1 et α_2 sont des constantes d'intégration ;
La solution particulière de l'équation générale est : $w(t) = w^* + \alpha_1 e^{x_1 t} + \alpha_2 e^{x_2 t}$

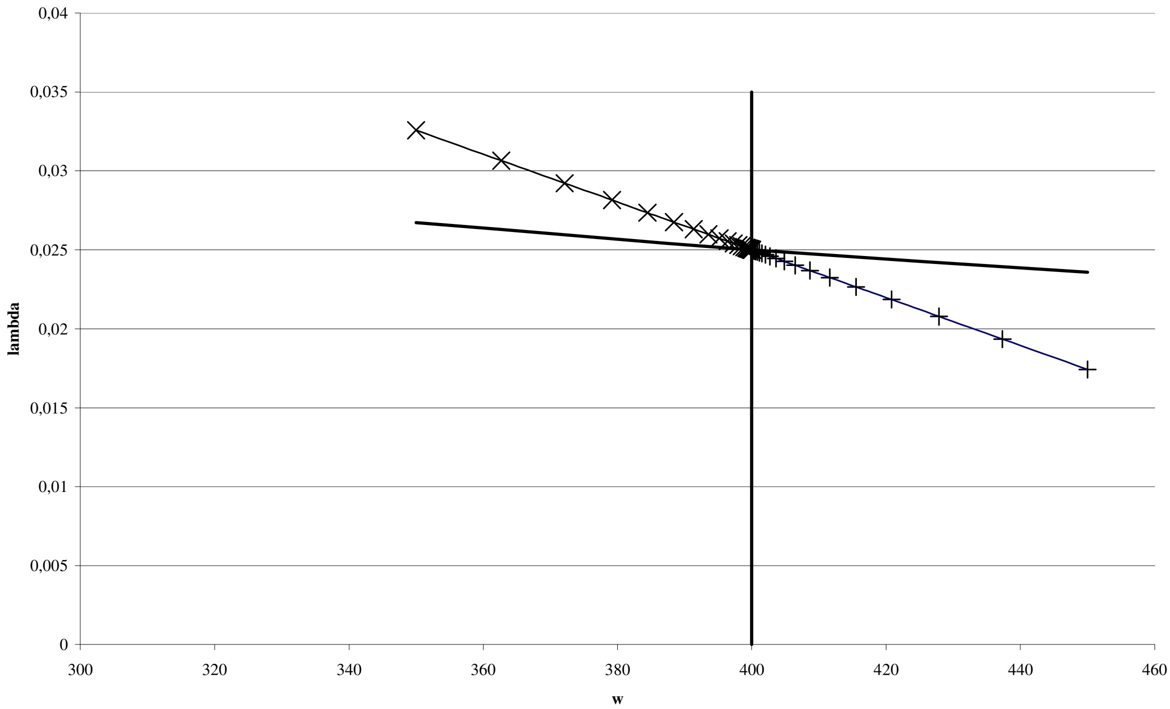
On ne retient que les trajectoires qui convergent vers *E*, par conséquent $\alpha_2 = 0$. En $w(0) = w_0$, il vient : $\alpha_1 = w_0 - w^*$. D'où :

$$w(t) = w^* + (w_0 - w^*)e^{x_1 t}$$

Comme $\dot{w} \cong \frac{1}{\lambda^{*2}}(\lambda - \lambda^*) + w^{*-0,5}(w - w^*)$, l'expression du multiplicateur λ en *t* est donnée en fonction de celle de *w* : $\lambda(t) \cong \lambda^* + \lambda^{*2} w^{*-0,5}(w(t) - w^*) + \lambda^{*2}\dot{w}(t)$ or $w(t) - w^* = (w_0 - w^*)e^{x_1 t}$ et $\dot{w}(t) = x_1(w_0 - w^*)e^{x_1 t}$. Il vient :

$\lambda(t) \cong \lambda^* + \lambda^{*2} w^{*-0,5}(w_0 - w^*)e^{x_1 t} + \lambda^{*2} x_1 (w_0 - w^*)e^{x_1 t}$ soit $\lambda(t) \cong \lambda^* + \lambda^{*2}(w_0 - w^*)e^{x_1 t}(w^{*-0,5} + x_1)$.
D'où $\lambda(0) \cong \lambda^* + \lambda^{*2}(w_0 - w^*)(w^{*-0,5} + x_1)$

Figure 10. Diagramme de phases : les trajectoires (uniques) vers l'état régulier



En gras les combinaisons des variables telles que le multiplicateur et la richesse sont constants.

B. *Exemple 2 : Brander & Taylor 1998*

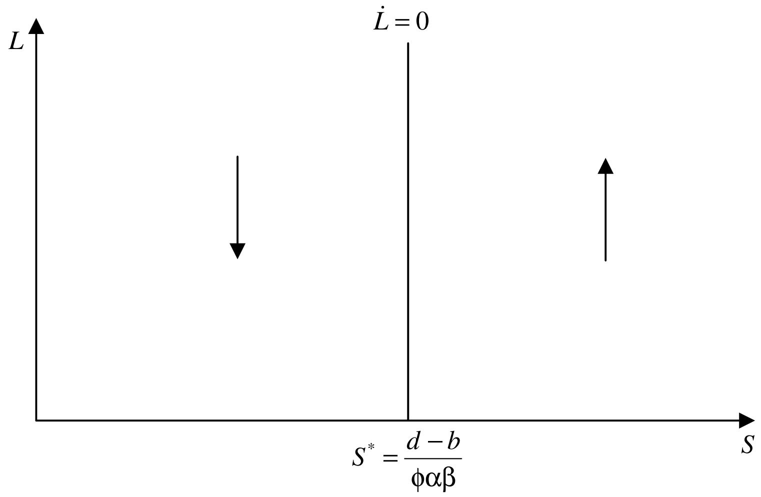
Le diagramme de phases correspondant au modèle de Brander, J. A. & M. Scott Taylor, 1998 peut être établi comme suit.

Lieu $\dot{L}=0$. On peut montrer que pourvu que L soit différent de 0, il correspond un niveau unique de la ressource à long terme :

$S^{*}=\dfrac{d-b}{\phi\alpha\beta}>0$ par hypothèse.

Ce lieu établit une relation implicite entre S et L qui dans le plan (S, L) est représentée par une droite verticale.

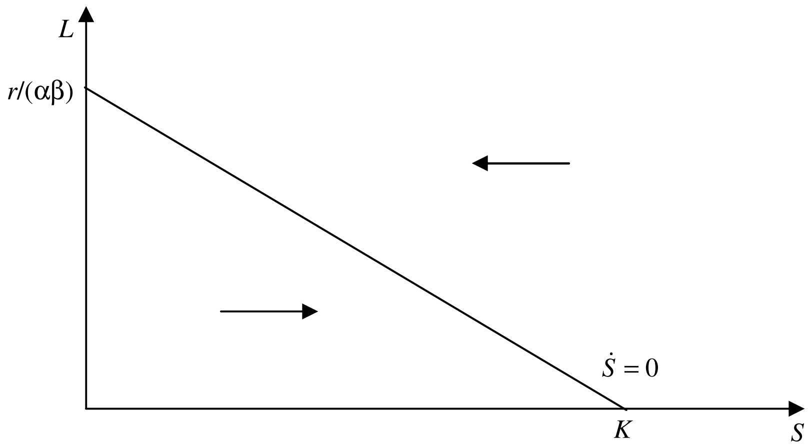
Figure 11. Evolution de la population dans le plan (*S*, *L*), Brander & Taylor 1998



Lieu $\dot{S}=0$. On peut montrer que pourvu que S soit différent de 0, on peut établir une relation linéaire entre L et S :

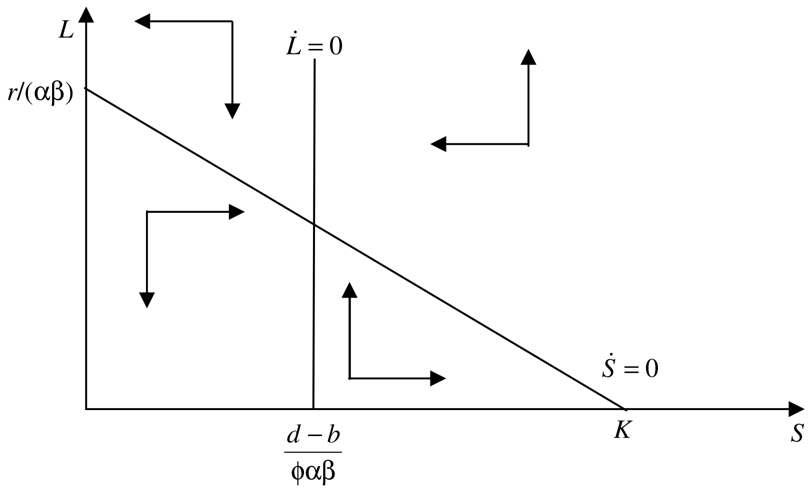
$$L\big|_{\dot{S}=0}=\frac{r\left(1-\dfrac{S}{K}\right)}{\alpha\beta} \text{ d'où } \left.\frac{dL}{dS}\right|_{\dot{S}=0}=-\frac{r}{K}<0 \text{ et } \left.\frac{d^{2}L}{dS^{2}}\right|_{\dot{S}=0}=0$$

Figure 12. Evolution de la RNR dans le plan (*S*, *L*), Brander & Taylor 1998



On peut orienter les lignes de phase horizontales en remarquant que la dynamique de la ressource est une fonction décroissante de la taille de la population. Sous le lieu $\dot{S} = 0$ i.e. pour un niveau de la population inférieur à celui qui permet la constance de la taille de la RNR, la pression (prélèvement) réalisée par la population humaine, permet à la ressource d'augmenter.

Figure 13. Dynamique transitionnelle dans le modèle de Brander & Taylor 1998



Vérifier les propriétés de l'état régulier : stable, convergence cyclique. Démonstration : Brander, J. A. & M. Scott Taylor, 1998

Section 5. Résolution d'un problème de contrôle optimal avec une feuille de calcul

D'après www.utdallas.edu/~sethi/Powerpoint/Chapter2.ppt consulté le 22 déc. 08

On considère le problème suivant de contrôle optimal :

$$\max_{u(t),t\in[0;1]} U \equiv \int_0^1 -\frac{1}{2}\left(x(t)^2 + u(t)^2\right)dt \text{ sous } \dot{x}(t) = -x(t)^3 + u(t) \text{ et } x(0) = 5 \text{ et } \pi(1) = 0 \text{ (CTV)}$$

La fonction de Hamilton correspondante est :

$$\mathrm{H}(x(t), u(t), \pi(t), t) \equiv -\frac{1}{2}\left(x(t)^2 + u(t)^2\right) + \pi(t)\left(-x(t)^3 + u(t)\right)$$

Le contrôle optimal et la trajectoire optimale sont déterminés quand les égalités suivantes sont respectées (PMP) :

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \equiv -u(t) + \pi(t) = 0 \ ; \ \forall t \in [0;1]$$
$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \dot{\pi} = 0 \Leftrightarrow -x(t) - 3x(t)^2\pi(t) + \dot{\pi}(t) = 0 \ ; \ \forall t \in [0;1]$$
$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \pi} = \dot{x}(t) \Leftrightarrow -x(t)^3 + u(t) = \dot{x}(t) \ ; \ \forall t \in [0;1]$$

Afin de résoudre le problème avec la feuille de calcul il faut définir un pas de temps discret Δt (0,01) et réécrire les équations canoniques de Hamilton, compte tenu de la condition de l'optimum instantané. Cela donne :

$$\pi(t + \Delta t) = \pi(t + \Delta t) + \left(x(t) + 3x(t)^2\pi(t)\right)\Delta t$$
$$x(t + \Delta t) = x(t) - \left(x(t)^3 + \lambda(t)\right)\Delta t$$

Dans la feuille de calcul, définir les colonnes comme dans le tableau suivant :

Colonnes Lignes	A	B	C	D	E
1	***t***	**λ**	***x***	**Δt**	**0,01**
2	**0**	**-0,1**	**5**		
3	**0,01**	**+B2+(C2+3*C2^2*B2)*E1**	**+C2+(B2-C2^3)*E1**		

Ce qui donne les valeurs suivantes qui sont recopiées de ligne en ligne à partir de la ligne 3 :

Colonnes / Lignes	A	B	C	D	E
1	***t***	**π**	***x***	**Δt**	**0,01**
2	**0**	**-0,1**	**5**		
3	**0,01**	**-0,125**	**3,749**		
4	**0,02**	**-0,14021625**	**3,220828013**		
5	**0,03**	**-0,15164495**	**2,885305749**		
6	**0,04**	**-0,16066517**	**2,643587905**		
7	**0,05**	**-0,16791383**	**2,457232606**		

La valeur initiale de *x* correspond à la donnée du problème ; celle du multiplicateur (qui est aussi celle du contrôle optimal) est fixée de manière arbitraire : elle ne reflète pas la solution du problème de contrôle optimale. Celle-ci dépendra de la condition de transversalité $\pi(1) = 0$. Il faut donc se reporter à la cellule correspondant à la date t = 1 et avec le solveur de la feuille de calcul imposer la valeur qui découle de la CTV en tapant les commandes suivantes :

Cellule cible à définir : B102
Egale à valeur : 0
Cellule variable : B2

Les solutions sont les suivantes :

Colonnes / Lignes	A	B	C	D	E
1	***t***	**π**	***x***	**Δt**	**0,01**
2	**0**	**-0,10436397**	**5**		
3	**0,01**	**-0,13263694**	**3,74895636**		
…					
99	**0,97**	**-0,01843979**	**0,632003035**		
100	**0,98**	**-0,01234072**	**0,629294241**		
101	**0,99**	**-0,00619439**	**0,626678758**		
102	**1**	**-5,8012E-07**	**0,624155682**		

Le graphe de la solution est le suivant :

Figure 14. Résolution d'un problème de contrôle optimal sur solveur