

# Microéconomie

## Incertain et Information

---

---

---

---

---

---

---

---

## Objectifs du cours

- Cours d'outillage et de méthode
- Vous familiariser avec l'utilisation des modèles et méthodes de la microéconomie contemporaine.
- Vous habituer à construire vos raisonnements à partir de modèles.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Méthode de Travail

- Pendant le cours : présentation des concepts et des outils, illustration par des exemples d'utilisation, entraînement avec des exercices.
- Après le cours : lire les chapitres d'ouvrage indiqués, refaire les exercices seul, commencer à lire des articles de recherche en lien avec le cours.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ouvrages de Référence

- H. Varian : « Introduction à la Microéconomie », De Boeck Université.
- J.-J. Laffont : « Economie de l'Incertain et de l'Information », Economica.
- C. Gollier : « The Economics of Risk and Time », MIT Press.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

4

---

---

---

---

---

---

---

---

## Contenu du Cours

- La théorie de la décision en univers incertain (4 séances).
- Incertitude et inégalités (1 séance).
- Théorie de l'agence (4 séances).
- 1 séance : ...

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

5

---

---

---

---

---

---

---

---

## Séance 1 : Risque I

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

6

---

---

---

---

---

---

---

---

## Rappels de théorie de la décision

- Ensemble d'alternatives  $X$
- Relation de préférence individuelle : relation binaire  $\preceq$  définie sur  $X$ ,  $x \preceq y$  signifie que l'alternative  $y$  est préférée par l'agent à l'alternative  $x$ .
- La relation de préférence est dite *rationnelle* si elle est *complète* (on peut toujours ordonner deux alternatives) et *transitive* ( $x \preceq y$  et  $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ ).

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

7

---

---

---

---

---

---

---

---

## Rappels de théorie de la décision

- La relation de préférences est *continue* si elle est préservée par passage à la limite (pour toute paire de suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  telles que pour tout  $n$ ,  $x_n \preceq y_n$  on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \preceq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ )
- Une relation de préférence est *rationnelle* et *continue* **si et seulement si** il existe une fonction d'utilité  $U(x): X \rightarrow \mathbb{R}$  qui la représente.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

8

---

---

---

---

---

---

---

---

## La notion de loterie

- Pour modéliser un environnement incertain, on introduit deux éléments :
  - tout d'abord une liste de l'ensemble des *états de la nature* possibles, qu'on notera  $\Omega$  (un élément  $\omega$  de  $\Omega$  est une description complète des variables exogènes du modèle considéré).
  - ensuite, une mesure de probabilité  $\mu$  (objective) définie sur les éléments de  $\Omega$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

9

---

---

---

---

---

---

---

---

## La notion de loterie

- Une loterie  $L$  (ou *variable aléatoire*) est alors définie par un couple  $(\Omega, \mu)$ , soit plus simplement dans le cas où  $\Omega$  est fini de cardinalité  $s$ , par un vecteur de dimension  $s$  :  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$  tel que pour tout  $i$ ,  $\mu_i \geq 0$  et  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s = 1$ ,  $\mu_i$  est la probabilité que l'évènement  $i$  se réalise.
- Si  $s=3$ , on peut aisément représenter graphiquement une loterie à l'aide du triangle de Machina.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

10

---

---

---

---

---

---

---

---

## La notion de loterie

- On peut également définir des loteries sur l'espace des loteries  $L$ , on parle alors de loteries composées. Cela est équivalent à définir les combinaisons convexes de loteries  $L$ . Seules les probabilités (finales) sur les états de la nature importent.

*Remarque:* l'ensemble des loteries sur  $\Omega$  est un ensemble convexe.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

11

---

---

---

---

---

---

---

---

## Notions de Probabilités

- En général dans les applications,  $\Omega$  n'est pas fini, mais c'est par exemple un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$ . Dans ce cas, les probabilités sont définies par une fonction de densité  $f(\omega)$  définie sur  $\Omega$ , positive, telle que  $\int_{\Omega} f(\omega) d\omega = 1$ . Un évènement est alors un sous-ensemble  $\Omega_1$  de  $\Omega$  et la probabilité de cet évènement est donnée par  $\int_{\Omega_1} f(\omega) d\omega$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

12

---

---

---

---

---

---

---

---

## Notions de Probabilités

- Si  $\Omega$  est un sous-ensemble  $[a,b]$  de  $\mathbb{R}$  (par exemple des paiements monétaires), alors on définit également la densité cumulée

$$F(\omega) = \int_a^\omega f(u) du.$$

- Si  $h(\cdot)$  est une fonction définie sur  $[a,b]$  (on parle aussi de *variable aléatoire*), l'espérance de  $h$  est donnée par (si elle existe)

$$E(h) = \int_a^b h(u).f(u) du$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

13

---

---

---

---

---

---

---

---

## Notions de Probabilités

- La variance de la fonction  $h(\cdot)$  est donnée par

$$\text{Var}(h) = E[(h - E(h))^2],$$

- La covariance de 2 fonctions  $h(\cdot)$  et  $k(\cdot)$  est donnée par

$$\text{Cov}(h,k) = E[(h - E(h)).(k - E(k))].$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

14

---

---

---

---

---

---

---

---

## Notions de Probabilités

- Famille de densités très importante : **les lois normales.**

Elles sont définies sur  $[-\infty, +\infty]$  par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

où  $\mu$  est l'espérance et  $\sigma^2$  la variance de la densité.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

15

---

---

---

---

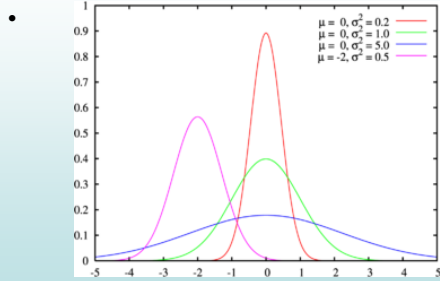
---

---

---

---

## Notions de Probabilités



V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

16

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les axiomes sur les préférences en univers incertain

- On suppose que les préférences de l'agent sont définies par une relation binaire sur les loteries.
- Axiome 1 : la relation de préférence est *rationnelle*, c-a-d qu'elle est *complète* et *transitive*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

17

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les axiomes sur les préférences en univers incertain

- La convexité de l'ensemble des loteries permet de simplifier un peu la notion de *continuité*.
- Axiome 2 : la relation de préférence est *continue*, c-a-d que pour toutes loteries  $L_1, L_2$  et  $L_3$ , telles que  $L_1 \preceq L_2 \preceq L_3$  il existe  $\alpha$  dans  $[0, 1]$ , tel que
$$L_2 \cong \alpha L_1 + (1 - \alpha) L_3$$
- Ces 2 axiomes suffisent pour garantir l'existence d'une fonction d'utilité représentant les préférences sur les loteries, on voudrait en savoir plus...

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

18

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les axiomes sur les préférences en univers incertain

- **Axiome 3** (axiome d'indépendance): la relation de préférences est telle que pour toutes loteries  $L_1, L_2$  et  $L_3$ , et pour tout  $\alpha$  dans  $[0,1]$ , on a:  
$$L_1 \preceq L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \preceq \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$$

Remarque : cet axiome n'a pas d'équivalent en théorie de la décision en univers certain.

---

---

---

---

---

---

---

---

## La théorie de l'espérance d'utilité

- **Théorème** : Si la relation de préférences sur les loteries satisfait les axiomes 1, 2 et 3, alors elle peut être représentée par une fonction de préférence qui est linéaire en probabilités.
- On parle alors d'utilité de Von Neumann-Morgenstern.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aversion au risque

- Une loterie monétaire  $L$  est une fonction  $\mu(x)$  qui définit la probabilité  $\mu$  que le paiement reçu prenne la valeur  $x$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aversion au risque

- Un agent est *averse au risque* s'il préfère toujours à une loterie monétaire L, un *paiement certain* égal à *l'espérance du paiement* obtenu avec L.
- Un agent caractérisé par une fonction d'utilité  $u(\cdot)$  est *averse au risque* si et seulement si  $u(\cdot)$  est *concave*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

22

---

---

---

---

---

---

---

---

## Rappels d'analyse convexe

- Fonction  $u(\cdot)$ , définie sur un ensemble convexe  $\Omega$  est *concave* si pour tous  $x, x'$  dans  $\Omega$  et pour tout  $\alpha$  dans  $[0,1]$ , on a

$$u(\alpha x + (1 - \alpha)x') \geq \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(x'),$$

- **Théorème** : Si  $u(\cdot)$  est dérivable, elle est concave si et seulement si pour tout  $x$  et  $z$

$$u(x+z) \leq u(x) + z \cdot u'(x).$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

23

---

---

---

---

---

---

---

---

## Rappels d'analyse convexe

- **Inégalité de Jensen**

Si  $u(\cdot)$  est une fonction concave et  $f(\cdot)$  une densité définies sur  $\Omega$  on a

$$u\left(\int x \cdot f(x) dx\right) \geq \int u(x) \cdot f(x) dx$$

soit en notations simplifiées :

$$u(E(x)) \geq E(u(x)).$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

24

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemple : le paradoxe de St Petersburg

- Combien un individu est-il prêt à payer pour jouer la loterie suivante ?
  - Gagner 1 avec probabilité  $\frac{1}{2}$ ,
  - Gagner 2 avec probabilité  $\frac{1}{4}$ ,
  - Gagner 4 avec probabilité  $\frac{1}{8}$ ,
  - ...
  - Gagner  $2^n$  avec probabilité  $\frac{1}{2^{n+1}}$ ,

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Prime de risque

- On appelle *risque* toute loterie monétaire d'espérance égale à zéro.
- La *prime de risque*  $p$  est ce qu'un agent est prêt à payer pour éliminer un risque  $L$ , elle est définie pour un niveau de richesse initiale  $w_0$  par

$$u(w_0 - p) = E(u(w_0 - x)),$$

L'inégalité de Jensen assure que  $p \geq 0$  pour un agent averse au risque.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Prime de risque

- Considérons pour un agent la possibilité de gagner ou de perdre le montant  $\epsilon$  (loterie binaire).
- On appelle *prime de probabilité*,  $\pi_\epsilon$ , la quantité  $\mu_\epsilon - 1/2$ , où  $\mu_\epsilon$  est la probabilité de gagner  $\epsilon$  dans la loterie binaire que l'agent est indifférent à accepter ou refuser.
- Un agent averse au risque a une prime de probabilité positive.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Mesure de l'aversion au risque

- **Définition** : L'indice absolu d'aversion pour le risque d'un agent, pour le niveau de richesse  $x$  est défini par

$$r_A(x) = -u''(x)/u'(x),$$

Remarques: on appelle aussi cet indice l'indice de Arrow-Pratt. Si on connaît la valeur de cet indice pour tous les niveaux de richesse, alors on connaît la fonction  $u(\cdot)$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

## Mesure de l'aversion au risque

- **Définition** : L'indice relatif d'aversion pour le risque d'un agent, pour le niveau de richesse  $x$  est défini par

$$r_R(x) = -x \cdot u''(x)/u'(x),$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Exercices

- Lien entre prime de risque et indice absolu d'aversion pour le risque (voir Laffont).
- Famille des fonctions d'indice absolu d'aversion pour le risque harmonique (voir Gollier).

---

---

---

---

---

---

---

---

## Séance 2 : Risque II

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

31

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aversion au risque

- On a défini ce qu'était l'aversion au risque pour un agent. Maintenant, on veut préciser ce que l'on entend lorsqu'on dit qu'un agent est plus ou moins averse au risque qu'un autre.

Quelle mesure de l'aversion au risque utiliser ?  
Prime de risque, prime de probabilité, indices d'aversion au risque, concavité de la fonction d'utilité, ... ?

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

32

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aversion au risque

- On dit qu'une fonction  $u_2(\cdot)$  est *plus concave* que  $u_1(\cdot)$  si il existe une fonction  $\psi(\cdot)$ , croissante et concave telle que  $u_2(x) = \psi(u_1(x))$  pour tout  $x$ .

Remarque: il s'agit d'une relation d'ordre *partiel*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

33

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aversion au risque

- i) l'indice absolu d'aversion pour le risque associé à  $u_2(\cdot)$  est plus grand que celui associé à  $u_1(\cdot)$ , pour tout  $x$ .
  - ii)  $u_2(\cdot)$  est plus concave que  $u_1(\cdot)$ ,
  - iii) La prime de risque de l'agent 2 est supérieure à celle de l'agent 1,
  - iv) La prime de probabilité de l'agent 2 est supérieure à celle de l'agent 1.
- i), ii), iii), iv) sont **équivalents**.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

34

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aversion au risque

Un corollaire de l'analyse précédente: si  $u_1(\cdot) = u_2(\cdot + a)$ , on peut comparer l'aversion au risque pour différents niveaux de richesse d'un même individu.

Les propriétés i) et ii) suivantes sont équivalentes:

- i) l'indice absolu d'aversion pour le risque est décroissant avec le niveau de richesse,
- ii)  $u_2(\cdot)$  est plus concave que  $u_2(\cdot + a)$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

35

---

---

---

---

---

---

---

---

## Comparer les risques

- Pour l'instant on a comparé les aversions au risque, on voudrait maintenant pouvoir comparer deux risques (ou deux loteries); par exemple pouvoir dire qu'une loterie est *plus risquée* qu'une autre.
- D'une manière générale, chercher à comparer des distributions de probabilité fait appel à la notion de *dominance stochastique*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

36

---

---

---

---

---

---

---

---

## Notions de dominance stochastique

- Soient  $f_1(\cdot)$  et  $f_2(\cdot)$  deux distributions de probabilité, définie sur  $\mathbb{R}$ ,
  - Soit  $U$  une famille de fonctions  $u(\cdot)$  définies sur  $\mathbb{R}$ ,
- On dit que  $f_1(\cdot)$  domine stochastiquement  $f_2(\cdot)$  si

$$\int u(x)f_1(x)dx \geq \int u(x)f_2(x)dx$$

pour toute fonction  $u$  dans  $U$ .

L'ordre *partiel* ainsi construit (sur l'ensemble des distributions) dépend de l'ensemble  $U$  retenu.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

37

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Notions de dominance stochastique

- Si  $U$  est l'ensemble de toutes les fonctions croissantes sur  $\mathbb{R}$ , alors on parlera de **dominance stochastique au premier ordre**.
- On montre que  $f_1(\cdot)$  domine stochastiquement  $f_2(\cdot)$  au premier ordre si et seulement si les densités cumulées sont telles que  $F_2(x) \geq F_1(x)$ , pour tout  $x$ .
- Tout individu ayant un goût pour la richesse va alors préférer la loterie 1 à la loterie 2.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

38

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Notions de dominance stochastique

- Si  $U$  est l'ensemble de toutes les fonctions croissantes et concaves sur  $\mathbb{R}$ , alors on parlera de **dominance stochastique au second ordre**.
- On montre que  $f_1(\cdot)$  domine stochastiquement  $f_2(\cdot)$  au second ordre si et seulement si les densités cumulées sont telles que pour tout  $x$  :

$$\int_{-\infty}^x F_1(u)du \leq \int_{-\infty}^x F_2(u)du$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

39

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Notions de dominance stochastique

- Dans ce cas, un individu averse au risque préférera la loterie 1 à la loterie 2.
- La notion de dominance stochastique du second ordre est particulièrement intéressante à appliquer à des distributions ayant la même moyenne (la même espérance) ; on isole ainsi vraiment la composante « risque ».

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

40

---

---

---

---

---

---

---

---

## Notions de dominance stochastique

- Si  $f_1(\cdot)$  domine stochastiquement  $f_2(\cdot)$  au second ordre et  $f_1(\cdot)$  et  $f_2(\cdot)$  ont la même espérance on dit que  $f_2(\cdot)$  est obtenu par un *étalement à moyenne constante* de  $f_1(\cdot)$ .
- On peut montrer que la loterie  $L_2$  associée à  $f_2(\cdot)$  est obtenue en composant la loterie  $L_1$  associée à  $f_1(\cdot)$  avec une loterie d'espérance nulle. Ainsi la loterie  $L_2$  est *plus risquée* que la loterie  $L_1$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

41

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le choix de portefeuille

- Considérons un agent caractérisé par une fonction d'utilité croissante et concave, il possède une richesse initiale  $\omega_0$ , qu'il peut investir, soit dans un actif non risqué (qui rapporte  $r$ , quel que soit l'état de la nature), soit dans un actif risqué (dont le rendement est donné par la loterie monétaire  $L$  soit la v.a. de rendement  $x$ ). Le problème de l'agent est de déterminer comment il doit répartir son investissement.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

42

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le choix de portefeuille

- Le problème de l'agent peut s'écrire

$$\max_{\alpha} Eu(\omega_0(1+r) + \alpha(x-1-r))$$

et la condition du premier ordre (dérivée par rapport à  $\alpha$  égale à zéro):

$$E[(x-1-r)u'(\omega_0(1+r) + \alpha(x-1-r))] = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le choix de portefeuille

- La fonction objectif est concave.
- La solution est intérieure ( $\alpha$  différent de zéro) si  $E(x) > 1+r$ .
- Il est raisonnable de supposer que  $x-1-r$  change de signe suivant la réalisation de l'aléa.
  
- Que peut-on dire de plus ?
- **Exercice** : montrer que si l'agent 2 est plus averse au risque que l'agent 1 (au sens de Arrow-Pratt), alors il investit moins dans l'actif risqué. En tirer une conclusion pour un agent dont l'indice absolu d'aversion au risque est décroissant (avec la richesse).

---

---

---

---

---

---

---

---

## Lemme mathématique utile

- Soient  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  deux fonctions définies sur  $[a,b]$ , telles que
  - La fonction  $f$  vérifie  $f(a) \geq 0$ ,  $f(b) \leq 0$ ,  $E(f) = 0$ , et  $f(\cdot)$  ne change de signe qu'une seule fois sur l'intervalle  $[a,b]$ ,
  - La fonction  $g(\cdot)$  est positive croissante,

Alors  $E(f.g) \leq 0$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le choix de portefeuille

- **Cas particulier important** : supposons que l'agent a une fonction d'utilité CARA,  $u(w) = -\exp(-Aw)$ , que l'actif risqué a un rendement qui suit une loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$ , et que l'actif sans risque a un rendement égal à 1. L'utilité de l'agent est donnée par :

$$E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-A\omega_0 + A\alpha - A\alpha x - \frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}] dx$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

46

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le choix de portefeuille

- **Cas particulier important (suite)**: on peut simplifier l'expression de l'utilité espérée et

$$E(u) = -\exp[-A\omega_0 + A\alpha - A\alpha\mu + \frac{A^2\alpha^2\sigma^2}{2}]$$

soit en prenant la condition du premier ordre :

$$\alpha^* = \frac{\mu - 1}{A \cdot \sigma^2}$$

avec A, l'indice absolu d'aversion pour le risque.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

47

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le choix de portefeuille

- **Remarque**: Dans l'exemple précédent (utilité CARA et distribution normale), l'utilité de l'agent ne dépend que de la moyenne et de la variance du rendement de l'actif. Ce n'est pas le cas en général, mais cette simplification est très souvent faite en finance de marché.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

48

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le choix de portefeuille

- **Exercice** : montrer que si la fonction d'utilité de l'agent est CRRA, alors la proportion de la richesse investie dans l'actif risqué est constante.
- Remarque: le problème de savoir si un individu investit moins dans un actif plus risqué est complexe et ne peut être tranché de manière générale.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

49

---

---

---

---

---

---

---

---

## Structures d'information

- L'amplitude du risque supporté par un agent est généralement lié à la quantité d'information qu'il possède. Celle-ci peut lui permettre de réduire l'incertitude à laquelle il fait face.
- Les données de départ sont un ensemble d'états de la nature  $\Omega$  et une distribution de probabilité  $f$ , définie sur  $\Omega$ , qui caractérise les croyances *a priori* de l'agent sur la distribution des états de la nature.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

50

---

---

---

---

---

---

---

---

## Structures d'information

- Une structure d'information *sans bruit* est une *partition* de  $\Omega$ , c'est-à-dire un ensemble de sous-parties disjointes de  $\Omega$ , couvrant entièrement  $\Omega$ . Il s'agit d'un ensemble de signaux que l'agent peut recevoir. Recevoir le signal  $\omega$  signifie que l'état de la nature est dans la sous-partie correspondante de  $\Omega$ .
- Pour l'agent, obtenir de l'information, c'est observer un signal issu d'une structure d'information donnée.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

51

---

---

---

---

---

---

---

---

## Structures d'information

- Une partition  $P_1$  est *plus fine* qu'une partition  $P_2$  si pour toute partie  $O_2$  dans  $P_2$ , il existe un ensemble de parties  $\{O_1^n\}$  telles que  $O_2 = \cup \{O_1^n\}$ ,
- Une structure d'information plus fine apporte plus d'information. En fait, elle est préférée par tout décideur *bayésien*, quel que soit le problème de décision.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

52

---

---

---

---

---

---

---

---

## Structures d'information

- Comment pose-t-on le problème de décision ?
- Etats de la nature :  $\omega$  dans  $\Omega$ ,
- Décisions :  $x$  dans  $X$ ,
- Fonction d'utilité :  $u(\omega, x)$ ,
- Information : distribution de probabilité (a posteriori),  $f$  définie sur  $\Omega$ .

$$\max_x \int_{\Omega} u(\omega, x) f(\omega) d\omega$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

53

---

---

---

---

---

---

---

---

## Structures d'information

- Une structure d'information *avec bruit* est la donnée d'un espace de signaux  $Y$  et d'une probabilité conditionnelle  $g(y|\omega)$ , qui définit la probabilité que le signal  $y$  soit reçu lorsque l'état de la nature est  $\omega$ .
- En utilisant la *loi de Bayes*, on peut trouver la distribution *a posteriori*  $f(\omega|y)$ . C'est cette distribution qui importe pour l'agent.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

54

---

---

---

---

---

---

---

---

## Structures d'information

- **Exercice** : Supposons que la distribution a priori de  $\omega$  suive une loi normale  $N(0, \sigma_1^2)$  et que le signal reçu par l'agent,  $y$ , suive une loi normale  $N(\omega, \sigma_2^2)$ . Calculer les distributions a posteriori  $f(\omega|y)$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

55

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Structures d'information

- Considérons deux structures d'information  $(Y_1, f_1)$  et  $(Y_2, f_2)$  (pour lesquelles les ensembles  $Y$  sont finis), on dit que  $f_1$  est *plus précise au sens de Blackwell* que  $f_2$  si il existe des nombres positifs  $\beta(y_1^k, y_2^k)$  tels que
  - $\sum_{y_2^k} \beta(y_1^k, y_2^k) = 1$  et
  - $f_2(y_2^k|\omega) = \sum_{y_1^k} \beta(y_1^k, y_2^k) f_1(y_1^k|\omega)$ .

Interprétation: le signal 2 est obtenu en brouillant le signal 1.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

56

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Problème de décision

- Reprenons le problème de l'agent. On définit l'espérance d'utilité de l'agent *ex ante* (avant la réception du signal):

$$U(Y, f, \pi(\cdot), u(\cdot)) = \sum_{y \in Y} \pi(y) \max_x \int_{\Omega} u(x, \omega) f(\omega|y) d\omega$$

où  $\pi$  est la distribution a priori.

On va utiliser ce critère pour comparer des structures d'information.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

57

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Théorème de Blackwell

- Si on ne met pas de restrictions sur  $\pi(\cdot)$  et  $u(\cdot)$ , on a :
- $U(Y_1, f_1, \pi(\cdot), u(\cdot)) \geq U(Y_2, f_2, \pi(\cdot), u(\cdot))$  pour toutes fonctions  $\pi(\cdot)$  et  $u(\cdot)$  **si et seulement si**  $(Y_1, f_1)$  est plus précise au sens de Blackwell que  $(Y_2, f_2)$ .

Remarque: on peut construire d'autres relations d'ordre partiel sur les structures d'information en restreignant l'espace des fonctions  $u(\cdot)$  considérées.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Structures d'information

- Remarque : la théorie des structures d'information devient beaucoup plus complexe lorsque l'on considère des interactions stratégiques entre plusieurs agents économiques.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Séance 3 : Risque III

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction du temps

- Jusqu'à présent, on a considéré des problèmes statiques, le temps n'intervenait pas et l'agent n'avait à prendre qu'une seule décision à un moment donné.
- De nombreux phénomènes comme les comportements d'épargne nécessitent la prise en compte du temps.
- On va maintenant étendre notre analyse et introduire la dimension temporelle.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

61

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction du temps

- Pour commencer, on va considérer un univers certain, on introduira l'incertitude par la suite.
- On considère un plan de consommation  $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$  défini sur  $n+1$  périodes. La variable  $c_i$  désigne la consommation à la date  $i$ . L'utilité de l'agent à la date 0 est donnée par

$$U(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

62

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction du temps

- Cette forme générale d'utilité n'est pas très utilisable pour des applications et on voudrait pouvoir dire plus sur la forme exacte de  $U$ .
- On fait généralement l'hypothèse que l'utilité est *séparable dans le temps*, soit

$$U(c_0, c_1, \dots, c_n) = \sum_{t=0}^n u_t(c_t)$$

- Les fonctions  $u_t$  sont parfois appelées fonctions de *félicité* ou d'*utilité instantanée* pour ne pas confondre avec l'utilité.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

63

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction du temps

- L'hypothèse de *séparabilité temporelle* est une restriction.
- Elle est équivalente à la *propriété d'indépendance* suivante : les préférences de l'agent sur les niveaux de consommation de la date 0 à la date t sont indépendantes de sa consommation aux dates ultérieures (de t+1 à n).
- Cela ne permet pas de prendre en compte la formation des habitudes par exemple.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

64

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction du temps

- Dans la plupart des applications on fait l'hypothèse additionnelle suivante :

$$u_t(c_t) = \beta^t u_0(c_t),$$

où  $\beta$  est appelé *facteur d'escompte* et est pris dans l'intervalle  $[0,1]$ .

- Cette hypothèse est en lien étroit avec la notion de *cohérence temporelle* de l'agent.
- **Exercice** : montrer qu'un agent avec de telles préférences est cohérent temporellement.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

65

---

---

---

---

---

---

---

---

## La décision d'épargne en univers certain

- Considérons un agent vivant deux périodes et qui a un revenu  $\omega_0$  à la date 0 et  $\omega_1$  à la date 1.
- Il peut épargner un montant  $s$  de son revenu à la date 0 dans un actif non risqué qui a un rendement égal à  $1+r$ .
- Le problème de décision s'écrit:

$$\max_s u(\omega_0 - s) + \beta u(\omega_1 + (1+r)s)$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

66

---

---

---

---

---

---

---

---

## La décision d'épargne en univers certain

- La fonction objectif est concave si  $u(\cdot)$  est concave.
- La condition du premier ordre s'écrit :

$$u'(\omega_0 - s) = \beta(1+r)u'(\omega_1 + (1+r)s)$$

- La décision optimale égalise le coût en terme de niveau d'utilité instantanée aujourd'hui et le bénéfice en terme d'utilité actualisée pour demain.
- Cas particulier : si  $\beta(1+r)=1$ , alors l'agent *lisse* le niveau de richesse ( $\omega_0 - s = \omega_1 + s$ ).

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

67

---

---

---

---

---

---

---

---

## La décision d'épargne en univers certain

- **Remarque:** l'utilité intertemporelle de l'agent, lorsque l'on fait l'hypothèse de séparabilité et de cohérence temporelle, est similaire à l'utilité instantanée d'un agent vivant dans un monde incertain dans lequel les probabilités des états de la nature sont  $(1-\beta, \beta(1-\beta), \beta^2(1-\beta), \dots)$ . Le comportement de cet agent vis-à-vis du temps est conditionné par son comportement vis-à-vis du risque. Pour éviter ce problème il faut considérer des fonctions d'utilité intertemporelle plus générales.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

68

---

---

---

---

---

---

---

---

## Epargne de précaution

- Introduisons maintenant de l'incertitude dans notre modèle et étudions l'impact que cela a sur la décision d'épargne de l'agent.
- Le terme « précaution » (on dit aussi « prudence ») désigne l'impact de l'incertitude demain sur ma décision d'épargner aujourd'hui.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

69

---

---

---

---

---

---

---

---

## Epargne de précaution

- On considère le modèle simple à deux périodes 0 et 1, introduit précédemment.
- Le revenu de l'agent à la période 0 est  $\omega_0$ .
- Son revenu à la période 1 est aléatoire et dépend de l'état de la nature, il est égal à  $\omega_1 + \tilde{a}$  où  $\tilde{a}$  est une variable aléatoire de moyenne nulle.
- Le rendement de l'épargne est  $1+r$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

70

---

---

---

---

---

---

---

---

## Epargne de précaution

- Le programme d'optimisation de l'agent s'écrit:

$$\max_s u(\omega_0 - s) + \beta E u(\omega_1 + \tilde{a} + (1+r)s)$$

- La condition du premier ordre est:

$$u'(\omega_0 - s) = \beta(1+r)u'(\omega_1 + \tilde{a} + (1+r)s)$$

- Il faut comparer ceci à la situation sans incertitude.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

71

---

---

---

---

---

---

---

---

## Epargne de précaution

- Du fait de la concavité de la fonction  $u$ , l'agent va épargner plus pour motif de prudence si:

$$E u'(\omega_1 + \tilde{a} + (1+r)s) \geq u'(\omega_1 + (1+r)s)$$

- On retrouve une condition d'aversion au risque, qui ne concerne pas  $u(\cdot)$  mais  $-u''(\cdot)$ .
- L'agent est *prudent* si  $u'(\cdot)$  est convexe, soit  $u'''(\cdot) \geq 0$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

72

---

---

---

---

---

---

---

---

## Epargne de précaution

- **Remarque:** on peut reconstruire toute une théorie de la *prudence* en répliquant ce que l'on a fait pour l'aversion au risque (indice absolu de prudence, indice relatif de prudence,...). Dans toute l'analyse qu'on a menée, il suffit de remplacer  $u(\cdot)$  par  $-u'(\cdot)$ .
- **Remarque:** en général, la prudence n'est pas liée à l'aversion au risque (par exemple un agent peut être plus averse au risque et moins prudent qu'un autre). Cependant, pour certaines classes de fonctions d'utilité, il peut y avoir un lien, exemple: utilité CARA.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

73

---

---

---

---

---

---

---

---

## La théorie des marchés contingents

- On revient au cadre d'analyse statique.
- On cherche à étendre la notion d'*équilibre général* à un univers incertain.
- Le modèle (sans production) est décrit par une ensemble  $N$  d'agents, un ensemble  $\Omega$  d'états de la nature et un ensemble  $M$  de biens.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

74

---

---

---

---

---

---

---

---

## La théorie des marchés contingents

- On suppose qu'il existe une distribution de probabilité objective  $f(\cdot)$  définie sur  $\Omega$ , connue de tous les agents, qui caractérise l'incertitude sur les états de la nature (l'information est donc incomplète mais symétrique).
- Un bien contingent est noté  $m_\omega$ , il correspond au bien  $m$  dans l'état de la nature  $\omega$ .
- On suppose également qu'il existe un système complet de *marchés contingents*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

75

---

---

---

---

---

---

---

---

## La théorie des marchés contingents

- Ces marchés sont ouverts *ex ante*, avant la résolution de l'incertitude, il y en a  $\text{card}\{M\} \times \text{card}\{\Omega\}$ .
- La *dotation initiale* des agents est un vecteur décrivant la dotation en chaque bien contingent.
- Le panier de consommation est ici une *stratégie de consommation*, qui spécifie pour chaque  $\omega$  un panier de consommation des  $M$  biens.
- Chaque agent a des *préférences* définies sur les stratégies de consommation, représentées par une fonction d'utilité de VNM.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

76

---

---

---

---

---

---

---

---

## La théorie des marchés contingents

- Si les préférences des agents sont convexes (c-a-d si la fonction d'utilité est *quasi-concave*), alors il existe un vecteur de *prix contingents* tels que offre=demande sur chacun des marchés contingents.
- On appelle un tel équilibre, *équilibre de Arrow-Debreu*.
- Les agents utilisent les marchés pour *s'assurer*, les riches sont ainsi répartis au mieux dans la population.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

77

---

---

---

---

---

---

---

---

## La théorie des marchés contingents

- **Remarque** : des préférences convexes ne signifient pas que les agents sont averses au risque.
- **Remarque**: les théorèmes du bien-être sont valables ici dans un sens *ex ante*, c-a-d que le critère de Pareto doit être appliqué avant la résolution de l'incertitude.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

78

---

---

---

---

---

---

---

---

## La théorie des marchés contingents

- La théorie des marchés contingents repose sur deux hypothèses fondamentales:
  - L'existence d'un système complet de marchés → théorie des marchés incomplets.
  - La symétrie de l'information → information asymétrique.
- Dans la suite on analysera des situations avec information asymétrique.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Exercices

- Ulysse et les sirènes ou le paradoxe du fumeur.
- Cohérence temporelle et interactions stratégiques.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Séance 4: Incertitude-Inégalités

---

---

---

---

---

---

---

---

## Théorie de la décision (bis)

- Théorie de l'espérance d'utilité de VNM (1944):
  - Univers avec probabilité objective,
  - Axiome 1, rationalité, Axiome 2, continuité.
  - Axiome 3: **indépendance**: pour toutes loteries  $L_1, L_2$  et  $L_3$ , et pour tout  $\alpha$  dans  $[0,1]$ , on a:

$$L_1 \preceq L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha)L_3 \preceq \alpha L_2 + (1-\alpha)L_3$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

82

---

---

---

---

---

---

---

---

## Théorie de la décision (bis)

- Théorie de l'utilité subjective de Savage (1954):
  - Univers sans probabilité objective,
  - Les préférences sont données par un préordre total sur les actes (qui engendrent des conséquences dans chaque état de la nature),
  - 7 axiomes garantissent alors l'existence simultanée d'une distribution de probabilités (subjectives) et d'une fonction d'utilité linéaire en probabilité telles que les préférences sont représentées par l'espérance (calculée avec les probabilités subjectives) de la fonction d'utilité.(voir Laffont chap 1, p10 pour plus de détails)

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

83

---

---

---

---

---

---

---

---

## Théorie de la décision (bis)

- Ces deux théories ont été critiquées très rapidement comme ne représentant pas le comportement réel des individus.

- Utilité VNM → paradoxe de Allais (1953),
- Utilité de Savage → paradoxe de Ellsberg (1960).

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

84

---

---

---

---

---

---

---

---

## La paradoxe de Allais

- Considérons les loteries L suivantes (on indique entre parenthèses les probabilités des différents gains:

$$L_1=(10000 (0,1); 0 (0,9)),$$

$$L_2=(15000 (0,09); 0 (0,91)),$$

$$L_3=(10000 (1); 0 (0)),$$

$$L_4=(15000 (0,9); 0 (0,1)).$$

Beaucoup d'individus préfèrent  $L_2$  à  $L_1$  et  $L_3$  à  $L_4$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

85

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le paradoxe de Allais

- Or ces choix violent l'axiome d'indépendance. En effet, si l'on note  $L_0$  la loterie qui donne 0 avec probabilité 1, on a:

$$L_1=0,1L_3+0,9L_0,$$

$$L_2=0,1L_4+0,9L_0.$$

Comment réagir face à ceci ?

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

86

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le paradoxe d'Ellsberg

- Considérons l'expérience de pensée suivante:

Deux urnes contiennent chacune 100 billes de couleur rouge ou noire. La première contient 49 billes blanches et 51 billes noires. La seconde contient un assortiment non-spécifié de billes. On tire une bille au hasard de chacune des urnes (bille 1 et bille 2).

Première décision: choisir une des deux billes, l'agent obtient 1000€ si elle est rouge et zéro sinon,

Deuxième décision: choisir une des deux billes, l'agent obtient 1000€ si elle est noire et zéro sinon.

Beaucoup d'individus choisissent la bille 1 dans les deux cas...

Ce phénomène est appelé aversion à l'*ambiguïté*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

87

---

---

---

---

---

---

---

---

### Au delà du modèle d'espérance d'utilité

- Relâcher l'axiome d'indépendance.
- Notion de comonotonie : deux v.a.  $X$  et  $Y$  définies sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  sont dites *comonotones* si pour tous  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dans  $\Omega$ ,

$$X(\omega_1) \geq X(\omega_2) \Leftrightarrow Y(\omega_1) \geq Y(\omega_2)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Au delà du modèle d'espérance d'utilité

- Axiome de la chose sûre comonotone :  
Soient deux loteries  $L_1=(x(\cdot),p(\cdot))$  et  $L_2=(y(\cdot),p(\cdot))$ , *comonotones*, dont les paiements  $x_i$  et  $y_i$  sont indicés par ordre croissant et telles que  $x_k=y_k$ . On construit les loteries  $L'_1$  et  $L'_2$  en remplaçant  $x_k$  et  $y_k$  par  $x'_k$  tel que  $x_{k-1} \leq x'_k \leq x_{k+1}$  et  $y_{k-1} \leq y'_k \leq y_{k+1}$ . On a alors  $L_1$  préférée à  $L_2$  **si et seulement si**  $L'_1$  préférée à  $L'_2$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

### Au delà du modèle d'espérance d'utilité

- Explication: on relâche l'axiome d'indépendance en demandant qu'il ne s'applique que si les loteries de départ et d'arrivée sont *comonotones*.
- Application : revoir le paradoxe de Allais.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Au delà du modèle d'espérance d'utilité

- Malgré le relâchement des hypothèses du modèle VNM on peut représenter les préférences d'un agent.
- Il existe une fonction  $u(\cdot)$  continue et une fonction  $\varphi(\cdot)$  continue, croissante, définie de  $[0,1]$  dans  $[0,1]$  telles que la loterie  $L=(x_i, p_i)$  (où les indices classent les  $x$  dans l'ordre croissant) est évaluée par la fonction

$$U(L) = u(x_1) + \varphi\left(\sum_{i=2}^n p_i\right)(u(x_2) - u(x_1)) + \dots$$

$$+ \varphi\left(\sum_{i=j}^n p_i\right)(u(x_j) - u(x_{j-1})) + \dots + \varphi(p_n)(u(x_n) - u(x_{n-1})).$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

91

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Au delà du modèle d'espérance d'utilité

- La fonction  $\varphi(\cdot)$  joue le rôle d'une fonction de transformation des probabilités. Si elle est linéaire, on retombe sur le modèle de VNM.
- On appelle généralement ce modèle *Rank Dependent Expected Utility*.
- Lorsque l'espace des états est continu, on représente l'utilité en utilisant la notion de *capacité* et d'*intégrale de Choquet*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

92

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Au delà du modèle d'espérance d'utilité

- Cohérence dynamique et axiome d'indépendance.  
Un modèle de décision est dit cohérent dynamiquement si les projets de décision que l'agent fait pour chaque état de la nature (lorsque l'incertitude sera levée) ne sont pas changés au fur et à mesure que l'agent obtient de l'information sur cet état de la nature (et donc révise ses croyances).

Tout modèle qui ne satisfait pas l'axiome d'indépendance n'est pas cohérent dynamiquement.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

93

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Mesure des Inégalités

- Thème apparemment bien différent.
- Comment mesurer les inégalités dans une population et évaluer la répartition des revenus ?
- On peut utiliser la variance, l'écart-type de la distribution, ou encore l'indice de Gini.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

94

---

---

---

---

---

---

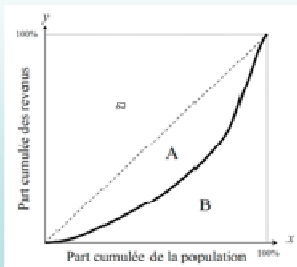
---

---

## Mesure des Inégalités

- Coefficient de Gini et courbe de Lorenz:

- 



V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

95

---

---

---

---

---

---

---

---

## Mesure des Inégalités

- Idée générale : comparer des distributions,
- Donc problème très proche du problème de la décision dans l'incertain et de la mesure du risque.
  
- Comment construire une fonction de bien-être collectif ?
- Approche axiomatique.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

96

---

---

---

---

---

---

---

---

## Mesure des Inégalités

- Idée: on veut pouvoir représenter à l'aide d'un indice (une fonction) les préférences de la société sur les distributions de revenus.
- Parallèle: on veut pouvoir représenter à l'aide d'une fonction d'utilité les préférences d'un individu entre différentes loteries.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

97

---

---

---

---

---

---

---

---

## Mesure des Inégalités

- Néanmoins, on voudrait aller plus loin que la théorie de la décision et spécifier la forme de la fonction qui sert à calculer l'indice (parallèle: spécifier la forme de la fonction d'utilité).
- On va donc introduire plus d'axiomes.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

98

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les indices de Atkinson-Kolm-Sen

- Considérons la répartition  $X$  du revenu dans une population de taille  $n$ . L'agent  $i$  a un revenu  $x_i$ .
- Une possibilité pour comparer deux distribution est de calculer l'indice:

$$W(X) = 1/n \sum_{i=1}^n u(x_i).$$

Avec  $u(\cdot)$  croissante strictement.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

99

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les indices de Atkinson-Kolm-Sen

Axiome 1 : la relation de préférence sur les distributions est rationnelle.

Axiome 2: elle est continue.

Axiome 3: elle a la propriété d'indépendance (la préférence entre deux distributions ne dépend pas de leur partie commune).

Axiome 4: monotonie, si deux distributions sont telles que la première est obtenue à partir de la seconde en augmentant la richesse d'un individu sans diminuer celle d'aucun autre, alors le décideur préfère strictement la première.

Axiome 5: impartialité, le décideur est insensible à toute permutation de l'identité des individus.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

100

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les indices de Atkinson-Kolm-Sen

Un indice d'évaluation de la distribution des revenus dans une société de taille  $n$  est de la forme  $W(X)$  si et seulement si il satisfait les axiomes 1 à 5.

Question : est-ce que  $u(.)$  est concave ?

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

101

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les indices de Atkinson-Kolm-Sen

On peut s'assurer de la concavité de la fonction  $u(.)$  en ajoutant un sixième axiome qui utilise la notion déjà utilisée d'étalement à moyenne constante.

Axiome 6: si l'on effectue un transfert d'un riche vers un pauvre sans modifier le classement entre ces deux individus, alors le décideur préfère la distribution finale.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

102

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les indices de Atkinson-Kolm-Sen

Cette propriété est équivalente à dire que la courbe de Lorenz de la distribution finale est au-dessus de celle de la distribution initiale. Il s'agit donc d'un ordre partiel sur les distributions de revenus.

Si la relation de préférence du décideur satisfait en plus l'axiome 6, alors la fonction  $u(.)$  est concave et le décideur est *averse à l'inégalité*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

103

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les indices de Atkinson-Kolm-Sen

En ajoutant encore quelques axiomes, on peut caractériser presque entièrement la fonction  $u(.)$ .

Axiome 7:  $\lambda$ -invariance, si l'on multiplie tous les revenus par  $\lambda$ , on ne change pas la valeur de l'indice.

Axiome 8:  $\mu$ -invariance, si l'on ajoute le montant  $\mu$  à tous les revenus on ne change pas la valeur de l'indice.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

104

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les indices de Atkinson et Kolm

- Les axiomes 1 à 7 caractérisent l'indice de Atkinson

$$W_A(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$$

- Les axiomes 1 à 6 et 8 caractérisent l'indice de Kolm.

$$W_K(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\alpha(x_i - \bar{X})}$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

105

---

---

---

---

---

---

---

---

## L'indice de Gini

- On peut axiomatiser une généralisation de l'indice de Gini en remplaçant l'axiome d'indépendance par l'axiome de la chose sûre comonotone.
- Lecture conseillée: Gajdos (2001).

---

---

---

---

---

---

---

---

## Séance 5: Asymétrie d'information Aléa Moral

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction

- Jusqu'à présent : information incomplète mais symétrique, tous les agents ont la même information.
- Dans le reste du cours, nous allons étudier ce qui se passe lorsque les agents n'ont pas la même information → *théorie de l'agence*.

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction

- Partant d'une situation avec information symétrique mais incomplète, les asymétries d'information entre deux agents peuvent avoir deux sources:
  - Un des agents observe un signal sur l'état de la nature que l'autre n'observe pas, sans avoir de contrôle particulier sur ce signal (ex: bulletin météo) → information cachée (sélection adverse).
  - Un des agents peut entreprendre des actions que lui seul observe et qui ont une influence sur la distribution des états de la nature (ex : conduite prudente) → action cachée (aléa moral).

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

109

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction

- Dans un premier temps nous allons nous intéresser au problème de l'*action cachée*, dit aussi problème d'*aléa moral*.
- Ce problème a été initialement étudié dans le cadre des contrats d'assurance.
- Exemple: assurance automobile, prudence du conducteur ; assurance récolte, attention de l'agriculteur.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

110

---

---

---

---

---

---

---

---

## Assurance

- Cadre d'analyse: 2 agents  $i, j$  dont l'utilité  $u_i, u_j$  dépend du niveau de richesse  $\omega_i, \omega_j$ .
- Incertitude sur l'état de la nature ; deux états possibles. Etat 1 avec probabilité  $\mu$ , état 2 avec probabilité  $1-\mu$ .
- On a donc quatre niveaux de richesse possibles:  $\omega_{i1}, \omega_{j1}, \omega_{i2}, \omega_{j2}$ .
- Possibilité de signer des contrats d'assurance *ex ante*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

111

---

---

---

---

---

---

---

---

## Assurance

- On peut représenter cette économie dans une boîte d'Edgeworth.
- Si l'un des deux agents est neutre vis-à-vis du risque, et l'autre (par exemple  $i$ ) averse au risque, alors l'ensemble des optima de Pareto (au sens ex ante) est tel que  $\omega_{i1} = \omega_{i2}$ . Il doit y avoir assurance complète.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

112

---

---

---

---

---

---

---

---

## Assurance

- Supposons que l'agent  $j$  ait tout le pouvoir de négociation, il va proposer à l'agent  $i$  un contrat d'assurance complète qui laisse l'agent  $i$  indifférent entre le *statu quo* et ce contrat. Le surplus issu de la transaction est alors accaparé par  $j$  (voir représentation dans la boîte d'Edgeworth).

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

113

---

---

---

---

---

---

---

---

## Assurance et Information

- Supposons que, avant que les agents aient la possibilité de signer un contrat, un informateur leur indique quel sera l'état de la nature (1 ou 2).
- Alors, il n'y a plus de transaction possible. Le bien-être diminue au sens de Pareto (effet Hirshleifer).

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

114

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aléa Moral

- Reprenons notre modèle d'assurance et supposons que la distribution des états de la nature est en fait influencée par une *action*  $e=e_h, e_l$ , entreprise par l'agent  $i$  averse au risque et inobservable par l'autre agent.
- On note  $\mu_h$  (resp.  $\mu_l$ ) la probabilité de l'état 1 si l'agent  $i$  entreprend l'action  $e_h$  ( resp.  $e_l$ ).
- On suppose que  $e=e_h, e_l$ , est aussi le coût en terme d'utilité de l'action, supporté par l'agent  $i$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

115

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aléa Moral

- Un *contrat d'assurance* proposé par l'agent  $j$  est caractérisé par  $\{t_{i1}, t_{i2}\}$ , les transferts de richesse reçu par l'agent  $i$  dans les états de la nature 1 et 2.
- Etant donné ce contrat, l'agent  $i$  va choisir  $e_h$  si:

$$\begin{aligned} \mu_h u_i(\omega_{i1} + t_{i1}) + (1 - \mu_h) u_i(\omega_{i2} + t_{i2}) - e_h &\geq \\ \mu_l u_i(\omega_{i1} + t_{i1}) + (1 - \mu_l) u_i(\omega_{i2} + t_{i2}) - e_l & \end{aligned}$$

et  $e_l$  sinon.

On appelle cette inégalité une *contrainte d'incitation*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

116

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aléa Moral

- Supposons  $e_h > e_l$  et admettons que l'agent  $j$  (appelé alors le *principal*) souhaite que l'action  $e_h$  soit entreprise : la *contrainte d'incitation* nous informe que cela ne sera pas compatible avec un contrat *d'assurance complète*.
- L'asymétrie d'information liée à l'action cachée de l'agent  $i$  va nécessiter un *rééquilibrage entre assurance et incitations*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

117

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aléa Moral

- **Exercice** : supposons que  $\omega_{i1} = \omega_{i2} = 0$ ,  $e_i = 0$  et que l'agent j (le *principal*, qui est neutre vis-à-vis du risque) veuille que l'agent i entreprenne l'action  $e_h$ . L'agent i pouvant toujours refuser un contrat, quels sont les transferts qui maximisent l'espérance de profit de l'agent j ?

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

118

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aléa Moral

- **Remarque** : si l'agent i est lui aussi neutre vis-à-vis du risque, alors il n'y a pas de coûts particuliers liés au problème de l'action cachée.
- **Remarque** : on pourrait également résoudre le problème de minimisation de l'agent j par la méthode du Lagrangien.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

119

---

---

---

---

---

---

---

---

## Aléa Moral

- **Remarque** : il n'est pas toujours évident de savoir quelle action est préférée par l'agent qui propose le contrat (le principal). La marche à suivre est alors la suivante: pour chaque action, on détermine le contrat qui maximise le surplus du principal, puis on cherche, action par action, celle qui permet d'obtenir le surplus le plus élevé.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

120

---

---

---

---

---

---

---

---

## Un modèle de relation salariale

- Les problèmes liés à l'aléa moral ont été largement étudiés dans la littérature traitant de la relation salariale.
- On considère la relation entre un salarié (l'agent) et son employeur (le principal).
- La performance du salarié dépend de son niveau d'effort  $e$  (inobservable) et est mesurée par la production (observable) de ce dernier,  $q$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

121

---

---

---

---

---

---

---

---

## Un modèle de relation salariale

- Le coût (privé) de l'effort exercé par le salarié est donné par la fonction  $\psi(e)$ . Celui-ci lorsqu'il reçoit le salaire  $t$ , a une utilité  $u(t) - \psi(e)$ .
- L'employeur ne peut directement conditionner le salaire au niveau d'effort  $e$  puisque celui-ci est inobservable. Il peut en revanche le lier au niveau de la production  $q$ , qui est corrélé à cet effort. Le surplus de l'employeur est  $S(q) - t$ .
- La *structure d'information* est caractérisée par la distribution de probabilité conditionnelle  $f(q|e)$  définie sur  $[q_{\text{inf}}, q_{\text{sup}}]$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

122

---

---

---

---

---

---

---

---

## Un modèle de relation salariale

- Le problème de l'employeur est de déterminer le salaire  $t(q)$  qui maximise son profit. Cela revient à résoudre :

$$\max_{t(\cdot), e} \int_{q_{\text{inf}}}^{q_{\text{sup}}} [S(x) - t(x)] f(x|e) dx$$

s.t.c

$$\int_{q_{\text{inf}}}^{q_{\text{sup}}} u(t(x)) f(x|e) dx - \psi(e) \geq 0$$

$$\int_{q_{\text{inf}}}^{q_{\text{sup}}} u(t(x)) f(x|e) dx - \psi(e) \geq \int_{q_{\text{inf}}}^{q_{\text{sup}}} u(t(x)) f(x|e') dx - \psi(e'), \forall e'$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

123

---

---

---

---

---

---

---

---

## Un modèle de relation salariale

- Ce problème d'optimisation ne peut être résolu sans hypothèses supplémentaires.
- On fait généralement l'hypothèse qu'un niveau d'effort plus élevé améliore la performance, au sens de la *dominance stochastique du premier ordre*.
- Supposons que l'on a deux niveaux d'effort possibles,  $e=1$  ou  $e=0$  avec  $\psi(0)=0$  et  $\psi(1)=\psi$ . On suppose que l'on veut implémenter (faire entreprendre à l'agent) l'action  $e=1$ . Maintenant, les contraintes ne suffisent plus à caractériser le salaire optimal.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

124

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Un modèle de relation salariale

- On peut réécrire le problème de l'employeur :

$$\min_{t(\cdot)} \int_{q_{inf}}^{q_{sup}} t(x) f(x|1) dx$$

s.l.c

$$\int_{q_{inf}}^{q_{sup}} u(t(x)) f(x|1) dx - \psi \geq 0$$

$$\int_{q_{inf}}^{q_{sup}} u(t(x)) f(x|1) dx - \psi \geq \int_{q_{inf}}^{q_{sup}} u(t(x)) f(x|0) dx$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

125

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Un modèle de relation salariale

- Le Lagrangien associé à ce programme s'écrit:

$$L(q, t) = -t \cdot f(q|1) + \lambda u(t) \cdot (f(q|1) - f(q|0)) + \mu u(t) \cdot f(q|1).$$

avec  $\mu$  le multiplicateur associé à la contrainte de participation et  $\lambda$  celui associé à la contrainte d'incitation.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

126

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Un modèle de relation salariale

- On optimise alors point par point en  $t$  et on obtient la condition du premier ordre (qui est ici nécessaire et suffisante):

$$\frac{1}{u'(t^{SB}(q))} = \mu + \lambda \left( \frac{f(q|1) - f(q|0)}{f(q|1)} \right).$$

- Il reste alors à montrer que  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$  (en exercice).
- Le salaire est alors croissant avec la performance si l'on a la propriété de *vraisemblance monotone*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

127

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Un modèle de relation salariale

- **Remarque** : Si l'on a plus de deux niveaux d'effort possibles, on augmente le nombre des contraintes d'incitations. La résolution du problème d'optimisation devient plus délicate et nécessite généralement des hypothèses supplémentaires sur la structure d'information.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

128

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Exercice

- Le métayage et les contrats linéaires (Laffont-Martimort, p175).

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

129

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Séance 6: Asymétrie d'information Anti-sélection

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

130

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction

- On étudie ici les conséquences de l'asymétrie d'information provenant d'une *information cachée*.
- Exemples: monopole face à un client dont il ne connaît pas la valeur de réserve, régulateur face à une entreprise dont il ne connaît pas les coûts de production, assureur ne connaissant pas l'état de santé d'un demandeur d'assurance...

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

131

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction

- Ici, l'agent informé n'a aucune influence sur la distribution des états de la nature (contrairement au paradigme de l'aléa moral). Il est simplement *mieux informé au sens de Blackwell* que l'autre agent.
- On appellera *principal* l'agent non-informé et on supposera que ce *principal* a tout le pouvoir de négociation.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

132

---

---

---

---

---

---

---

---

## Introduction

- Le modèle *principal-agent* que l'on va étudier ici est appelé *modèle d'anti-sélection* ou *modèle de sélection adverse*.
- Considérons le problème suivant : un principal souhaite déléguer la production d'un bien à un agent dont il ne connaît qu'imparfaitement les coûts de production.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

133

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- Lorsque le principal fait produire la quantité  $q$  du bien à l'agent en échange d'un transfert monétaire  $t$ , son profit est donné par  $\pi=S(q)-t$ , avec  $S(\cdot)$  fonction croissante concave.
- L'agent a un coût marginal de production constant égal à  $\theta$ , son utilité est  $u= t-\theta q$ .
- L'état de la nature est caractérisé par la valeur prise par la v.a.  $\theta$  dans  $\{\theta_1, \theta_2\}$  avec  $\theta_1 < \theta_2$ .
- L'agent connaît la valeur de  $\theta$  (son *type*), le principal connaît simplement la distribution ex ante des états de la nature, c-a-d la distribution  $\{p, 1-p\}$ , où  $p$  est la proba. que  $\theta=\theta_1$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

134

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- La chronologie que l'on considère est la suivante:

T=1 : l'agent observe son type  $\theta$ .

T=2 : le principal offre un contrat à l'agent.

T=3 : l'agent accepte ou refuse le contrat.

T=4 : le contrat est appliqué.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

135

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- Qu'entend-on par contrat ?

C'est un couple  $\{t, q\}$  spécifiant la quantité produite et le transfert reçu par l'agent, et auquel le principal s'engage à la date  $T=1$ .

Comme l'agent peut être de 2 types différents, le principal va s'engager sur 2 couples  $\{t_1, q_1\}$  et  $\{t_2, q_2\}$  parmi lesquels l'agent va choisir.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

136

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- Si le principal connaissait l'état de la nature :

- Il proposerait à l'agent de type  $\theta_i$  le contrat  $\{t_i^*, q_i^*\}$  avec :  $S'(q_i^*) = \theta_i$  et  $t_i^* = \theta_i q_i^*$ .
- C'est ce que l'on appelle l'*optimum de premier rang* puisqu'on maximise ainsi la somme des utilités (ici cela est équivalent au critère de Pareto).
- Le principal accapare la *rente* et laisse à l'agent son *utilité de réserve*.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

137

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- Lorsque le principal ne connaît pas l'état de la nature:

- S'il propose le menu de contrats  $\{t_i^*, q_i^*\}$  qui sont optimaux en information complète, alors l'agent quel que soit son *type*, choisira toujours  $\{t_2^*, q_2^*\}$ ; ce menu ne permet donc pas d'obtenir l'*optimum de premier rang*.
- Le principal va néanmoins offrir des contrats différenciés pour chaque type d'agent.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

138

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- Le programme du principal s'écrit:

$$\max_{t_1, q_1, t_2, q_2} p(S(q_1) - t_1) + (1-p)(S(q_2) - t_2)$$

s.l.c

$$(IC_1) \quad t_1 - \theta_1 q_1 \geq t_2 - \theta_1 q_2$$

$$(IC_2) \quad t_2 - \theta_2 q_2 \geq t_1 - \theta_2 q_1$$

$$(IR_1) \quad t_1 - \theta_1 q_1 \geq 0$$

$$(IR_2) \quad t_2 - \theta_2 q_2 \geq 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- Les contraintes (IC) sont les *contraintes d'incitation*, elles précisent que si le principal veut que l'agent de type  $\theta_i$  choisisse le contrat qui lui est destiné  $\{t_i, q_i\}$ , alors celui-ci doit le préférer au contrat qui est destiné à l'autre type  $\{t_j, q_j\}$ . Avec 2 types, il y a donc 2 contraintes d'incitation.
- Les contraintes (IR) sont les contraintes de *participation* ou de *rationalité individuelle*; elle doivent être satisfaites par les contrats proposés pour que l'agent ne préfère pas tout simplement refuser la transaction (ici on suppose que l'utilité de réserve de l'agent est la même dans les deux états de la nature et on la normalise à zéro).

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- Vu le nombre de contraintes, il est préférable de réfléchir un peu avant de se lancer dans la résolution par la méthode du Lagrangien...
- Exercice** : montrer que (a) la contrainte  $(IR_1)$  n'est jamais saturée et peut donc être négligée, (b) les quantités proposées sont nécessairement telles que  $q_1 \geq q_2$ , (c) si l'inégalité précédente est stricte alors une seule contrainte (IC) est saturée et c'est  $(IC_1)$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- On introduit donc le *programme relâché* suivant:

$$\max_{t_1, q_1, t_2, q_2} p(S(q_1) - t_1) + (1-p)(S(q_2) - t_2)$$

s.l.c

$$(IC_1) \quad t_1 - \theta_1 q_1 \geq t_2 - \theta_1 q_2$$

$$(IR_2) \quad t_2 - \theta_2 q_2 \geq 0$$

que l'on résout. Puis on vérifie que les autres contraintes sont bien satisfaites.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

142

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- A l'optimum, les deux contraintes sont nécessairement saturées.
- On résout alors en substituant  $t_1$  et  $t_2$  dans la fonction objectif.
- On se retrouve avec un programme d'optimisation sans contraintes. Les conditions du premier ordre sont:

$$S'(q_1) = \theta_1$$

$$S'(q_2) = \theta_2 + \frac{p}{1-p}(\theta_2 - \theta_1)$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

143

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- On a ainsi caractérisé l'optimum contraint du principal. C'est ce que l'on appelle l'*optimum de second rang*. Les contrats ainsi trouvés sont optimaux étant données les contraintes informationnelles auxquelles doit faire face le principal.
- A retenir:** l'agent efficace obtient nécessairement de la rente, du fait qu'il peut toujours prétendre être moins efficace qu'il ne l'est réellement.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

144

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le modèle de base

- Le principal doit alors trouver un équilibre entre *efficacité* de la production et *extraction de la rente* qu'il doit laisser à l'agent efficace.
- A l'optimum de second-rang, cela l'amène à distordre les quantités demandées à l'agent inefficace car cela permet de réduire la rente de l'agent efficace.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

145

---

---

---

---

---

---

---

---

## Un modèle plus général

- On garde le même modèle, en modifiant simplement l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable de coût marginal de l'agent. On suppose que  $\theta$  est cette fois dans l'intervalle  $[\theta_1, \theta_2]$ . L'espace des types est donc continu. La distribution des états de la nature est donnée par la densité  $f(\cdot)$  définie sur  $[\theta_1, \theta_2]$ . On notera  $F(\theta)$  la densité cumulée.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

146

---

---

---

---

---

---

---

---

## Définitions

- Un contrat entre le principal et l'agent est *direct* si il consiste en un mécanisme proposé à la date  $T=1$  par le principal de la forme  $\{t(\cdot), q(\cdot)\}$  où  $t$  et  $q$  sont des fonctions définies sur l'espace des types (ici le segment  $[\theta_1, \theta_2]$ ) dans lequel l'agent reporte un message qui consiste en l'annonce d'un *type*  $\theta$  à la date  $T=2$ , puis à la date  $T=3$ , l'allocation  $t(\theta)$ ,  $q(\theta)$  est réalisée.
- Un contrat direct est *révélateur* si à la date  $T=2$ , l'agent n'a jamais intérêt à mentir.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

147

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le principe de révélation

- Lorsque l'on étudie les propriétés des allocations finales obtenues par tout type de contrat entre le principal et l'agent, il n'y a pas de perte de généralité à restreindre son attention aux contrats directs révélateurs.
- La recherche du contrat optimal se résume donc à la recherche des fonctions  $t(\cdot)$  et  $q(\cdot)$  définies sur  $[\theta_1, \theta_2]$  et qui maximisent le profit du principal sous contraintes.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

148

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le programme du principal

$$\max_{t(\cdot), q(\cdot)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [S(q(x)) - t(x)] f(x) dx$$

s.l.c

$$(IC(\theta)) \quad t(\theta) - \theta q(\theta) \geq t(\theta') - \theta q(\theta') \quad \forall \theta, \theta'$$

$$(IR(\theta)) \quad t(\theta) - \theta q(\theta) \geq 0 \quad \forall \theta$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

149

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le programme du principal

- Comme précédemment, on a deux types de contraintes: les *contraintes d'incitation* (le contrat doit être révélateur) et les *contraintes de participation* (le contrat doit être préféré au statut quo (ici normalisé à zéro pour tous les types)).
- La difficulté vient du fait que l'on fait face ici à une infinité de contraintes.
- Comme dans le cas avec 2 types, il faut donc commencer par travailler sur l'ensemble des contraintes.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

150

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les contraintes d'incitation

- **Exercice** : (a) réécrire les contraintes d'incitation en utilisant les variables  $q(\cdot)$  et  $u(\cdot)$  avec  $u(\theta) = t(\theta) - \theta q(\theta)$ , plutôt que les variables  $t(\cdot)$  et  $q(\cdot)$ . (b) écrire les contraintes signifiant qu'un agent de type  $\theta$  ne doit pas prétendre être de type  $\theta'$  et vice-versa. (c) en déduire que la fonction  $q(\cdot)$  est nécessairement croissante. Comme  $q(\cdot)$  est bornée, elle est alors continue presque partout. (d) en déduire que la fonction  $u(\cdot)$  est dérivable et  $u'(\theta) = -q(\theta)$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

151

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les contraintes d'incitation

- On a alors le résultat très important suivant:
- L'ensemble des contraintes d'incitation peut être remplacé (de manière équivalente) par les contraintes

$$u'(\theta) = -q(\theta)$$

$q(\cdot)$  est croissante

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

152

---

---

---

---

---

---

---

---

## Les contraintes de participation

- On déduit aisément de l'analyse des contraintes incitatives que la seule contrainte de participation importante est celle qui concerne l'agent le moins efficace, c'est-à-dire ici  $(IR(\theta_2))$ .
- On peut maintenant réécrire le programme du principal.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

153

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le programme (bis)

$$\max_{f(\cdot), q(\cdot)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [S(q(x)) - x \cdot q(x) - u(x)] f(x) dx$$

s.l.c

$$u'(x) = -q(x)$$

$q(\cdot)$  est croissante

$$u(\theta_2) \geq 0$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

154

---

---

---

---

---

---

---

---

## Le programme (bis)

- **Remarque:** la rente laissée à l'agent ne dépend que de la forme du schéma de quantité implémenté (à une constante près). Les contraintes d'incitation ne laissent en fait que très peu de liberté pour fixer les transferts.
- On résout en général ce programme en négligeant dans un premier temps la contrainte de monotonie de  $q(\cdot)$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

155

---

---

---

---

---

---

---

---

## La rente

- Les deux contraintes restantes peuvent être utilisées pour calculer la rente  $u(\cdot)$ . On a:

$$u(\theta) = u(\theta_2) + \int_{\theta}^{\theta_2} q(x) dx$$

- L'objectif du principal est alors de maximiser:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} [S(q(x)) - x \cdot q(x) - \int_x^{\theta_2} q(u) du] f(x) dx - u(\theta_2)$$

Sous la contrainte  $u(\theta_2) \geq 0$ .

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

156

---

---

---

---

---

---

---

---

## La résolution

- La contrainte est saturée.
- On utilise alors une **intégration par partie** pour transformer le problème.
- L'objectif du principal devient alors de maximiser:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} [S(q(x)) - x \cdot q(x) - \frac{F(x)}{f(x)} q(x)] f(x) dx$$

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

157

---

---

---

---

---

---

---

---

## La résolution

- On peut alors optimiser point par point. La condition du premier ordre s'écrit:

$$S'(q^{SB}(\theta)) = \theta + \frac{F(\theta)}{f(\theta)}$$

- Si on fait l'hypothèse que le membre de droite est croissant en  $\theta$ , la contrainte de monotonie est satisfaite et on a bien résolu notre problème initial.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

158

---

---

---

---

---

---

---

---

## La résolution

- **Remarque** : ici encore, la production du type efficace n'est pas distordue par rapport à l'optimum de premier rang. Par contre la production de tous les autres types est réduite pour diminuer la rente laissée à l'agent.
- **Remarque** : l'analyse a été ici rendue simple par la forme particulière de la fonction d'utilité de l'agent.

V. Dequiedt

Cours de Microéconomie, 1ère  
année de Magistère

159

---

---

---

---

---

---

---

---