

Ce sujet comporte deux feuilles numérotées 1 et 2

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} ANNEE DU MAGISTERE
DE DEVELOPPEMENT ECONOMIQUE
Epreuve de MATHEMATIQUES-STATISTIQUES

Durée : 2 heures (en France de 14 h à 16 h) – calculatrice non autorisée -

Exercice 1 –

Calculez les intégrales suivantes :

$$\int (x^3 + 5x)^{10} (3x^2 + 5) dx$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Exercice 2 –

(a) Trouvez les fonctions de productivité marginale de l'équation CES suivante :

$$y = 12[0,4x_1^{-1/2} + 0,6x_2^{-1/2}]^{-2}$$

(b) Exprimez les fonctions suivantes comme composées de fonctions plus simples et calculez la dérivée dans chaque cas :

$$y = (1 + x + x^2)^{1/2}$$

$$y = 1/(x^{100} + 28)$$

Exercice 3 –

(a) Calculez l'inverse des matrices suivantes si elle existe :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Supposez qu'une entreprise produit deux biens (y_1 et y_2) avec deux intrants (z_1 et z_2). La matrice qui exprime les intrants nécessaires pour la production des deux biens est la suivante (a_{ij} indique la quantité d'intrant i nécessaire pour produire une unité de bien j) :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b1. Si la firme veut produire 5 unités de y_1 et 10 unités de y_2 , combien d'intrants z_1 et z_2 sont nécessaires ?

b2. Si le prix unitaire des intrants est de 5 euros pour z_1 et 10 euros pour z_2 , on peut alors écrire w le vecteur de prix des intrants :

$$w = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{note: } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Quelle est l'interprétation de $w^T A y$? Est-ce un scalaire ou une matrice ?

Exercice 4 –

(a) Calculez le taux de croissance relatif \dot{x}/x des fonctions suivantes :

a1 $x = 5t + 10$

a2 $x = \ln(t + 1)$

a3 $x = 5e^t$

a4 $x = e^{t^2}$

a5 $x = e^t + e^{-t}$

(b) Évaluez la limite suivante :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{x^\lambda - y^\lambda}{\lambda}$$

Exercice 5 –

Le tableau suivant classe 1456 personnes selon leur genre et leur attitude vis à vis d'une loi anti-arme :

	Hommes (S1)	Femmes (S2)	Totaux
Favorables à la loi (A1)	392	649	1041
Défavorables à la loi (A2)	241	174	415
Totaux	633	823	1456

Calculez les probabilités suivantes si une des personnes est choisie au hasard :

(a) $P(A1)$

(b) $P(A1/S1)$

(c) $P(A1/S2)$

(d) Comment interprétez-vous les réponses aux questions (b) et (c) ?

Exercice 6 –

Soient X et Y deux variables aléatoires ayant comme fonction de densité jointe :

$$f(x,y) = x + y ; 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1.$$

(a) Trouvez les fonctions de densité marginale $f_1(x)$ et $f_2(y)$ et montrez que $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$. Donc, X et Y ne sont pas indépendantes, calculez :

(b) La moyenne et la variance de X