

Ce sujet comporte deux feuilles numérotées 1 et 2

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} ANNEE DU MAGISTERE
DE DEVELOPPEMENT ECONOMIQUE

Epreuve de MATHEMATIQUES-STATISTIQUES

Durée : 2 heures (en France de 14 h à 16 h) – calculatrice non autorisée –

Le sujet comporte cinq questions qui doivent être traitées par les candidats

Question 1 (3 points)

Supposez que sur les quatorze morceaux de musique que comporte un disque compact (CD) vous en aimez huit. En utilisant la touche hasard du lecteur de CD, chacun des quatorze morceaux est joué une fois (et une seule) dans un ordre aléatoire. Trouvez la probabilité que parmi les deux premiers morceaux joués :

- (i) vous aimez les deux morceaux
- (ii) vous n'aimez aucun des deux morceaux
- (iii) vous n'aimez qu'un seul des deux morceaux.

Question 2 (6 points)

Rappel : une fonction $f(x)$, définie sur un intervalle ouvert contenant le point $x = a$, est continue en ce point si :

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, c'est à dire : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

et (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ **fin de rappel**

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer en quel(s) point(s) la fonction n'est pas continue et expliquer laquelle des conditions rappelées ci-dessus n'est pas satisfaite. Dans chaque cas, représentez graphiquement la fonction (chaque fonction est définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R}) :

(i) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 1 \\ x + 5, & x \geq 1 \end{cases}$

(ii) $f(x) = 1/x$

(iii) $f(x) = 1/(x - 3)^2$

(iv) $f(x) = \frac{(x - 2)}{(x^2 - x - 2)}$

Question 3 (5 points)

Supposez que deux entreprises A et B sont en situation de concurrence pure et parfaite lorsqu'elles décident des quantités qu'elles vont offrir sur le marché.

La fonction de coût de l'entreprise A est $C^A = 10q + 2q^2$, $q \geq 0$;

La fonction de coût de l'entreprise B est $C^B = 15q + q^2$, $q \geq 0$.

- (i) Trouvez la fonction d'offre de chaque entreprise, ces fonctions sont définies pour $q \geq 0$, et tracez les courbes de ces fonctions dans un même graphique. En quels points de leur ensemble de définition ces fonctions sont-elles dérivables ?
- (ii) Trouvez la fonction d'offre totale des deux entreprises et tracez la courbe de cette fonction dans un nouveau graphique. Cette fonction est-elle dérivable ?

Question 4 (2 points)

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{bmatrix}$$

Pour quelle valeur de k, a-t-on $AB=BA$?

Question 5 (4 points)

Dans les situations suivantes, déterminez la loi de la variable aléatoire X et donnez son espérance :

- (i) une fleuriste dispose de 100 tulipes dont 40 tulipes rouge et 60 tulipes rose. Elle compose un bouquet en prenant 10 tulipes au hasard. X est la variable aléatoire représentant le nombre de tulipes rose dans le bouquet.
- (ii) On lance un dé (non pipé) 10 fois de suite. X est la variable aléatoire représentant le nombre de fois où le « 6 » est apparu.
- (iii) Deux personnes lancent chacune une pièce de monnaie équilibrée. On dit que l'expérience est un succès si elles obtiennent toutes les deux « face ».
 - (iii-a) ces personnes répètent l'expérience 8 fois. X est la variable aléatoire représentant le nombre de succès.
 - (iii-b) Ces personnes répètent l'expérience jusqu'à ce qu'elles obtiennent un succès. X est la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir un succès.