

Ce sujet comporte deux feuilles numérotées 1 et 2

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} ANNEE DU MAGISTERE
DE DEVELOPPEMENT ECONOMIQUE

Epreuve de MATHEMATIQUES-STATISTIQUES

Durée : 2 heures (en France de 14 h à 16 h) – calculatrice non autorisée –

Question 1 (3 points) -

- On choisit cinq cartes au hasard dans un jeu de trente-deux. Quel est le nombre de tirages possibles ?
- On lance cinq fois un dé, on appelle résultat le 5-uplet $(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$ où R_i représente le numéro obtenu au $i^{\text{ème}}$ lancer. Quel est le nombre de résultats possibles ?
- Un enseignant interroge chaque jour 3 étudiants différents : un sur le cours, un sur le travail dirigé et un sur les démonstrations mathématiques. Le cours contient 32 étudiants. Quel est le nombre de choix du professeur pour interroger ces trois étudiants ?

Question 2 (3 points)

- Supposez qu'une école dispose de 20 classes : 16 contenant 25 étudiants chacune, 3 contenant 100 étudiants chacune et une contenant 300 étudiants pour un total de 1000 étudiants.
- Quelle est la taille moyenne d'une classe ?
- Choisissez au hasard un étudiant parmi les 1000. Soit X la variable aléatoire : taille de la classe à laquelle l'étudiant appartient. Ecrivez la loi de probabilité de X .
- Calculez la moyenne de X .

Question 3 (3 points) :

Pour la distribution suivante :

$$f(x) = \frac{3!}{x!(3-x)!} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

Calculez :

$$\mu = E(X), \quad E[X(X-1)] \quad \text{et} \quad \sigma^2 = E[X(X-1) + E(X) - \mu^2]$$

Question 4 (3 points)

Pour la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Ecrire l'équation caractéristique et trouvez les racines caractéristiques.
- Trouvez les vecteurs propres correspondant à l'équation caractéristique.
- Diagonalisez A.

Question 5 (3 points)

Trouvez les intégrales suivantes :

$$\int 10xe^{2x} dx$$

$$\int x^2 e^x dx \quad (\text{remarque : pour la seconde, vous devez utiliser l'intégration par partie deux fois})$$

Question 6 (5 points)

Une entreprise utilise un input (L) dans sa production (q) selon la fonction de production suivante :

$$q = aL^b, \quad a > 0, \quad b > 0 \text{ et } L \geq 0$$

Le coût de l'input est w et les coûts fixes sont égaux à C_0

- Montrer que dq/dL augmente lorsque dC/dq diminue, que dq/dL diminue lorsque dC/dq augmente, que dq/dL est constant lorsque dC/dq est constant.
- En quoi votre réponse est-elle reliée à la valeur de b ?